Klassen WI08ab **MLAN3 – Schlussprüfung** 27. Januar 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

numerische Integration
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
VR Struktur Skalarprodukt, Fourier–Polynom einer gegebenen Fkt.
lineare Abbildung
Basiswechsel
EWP
erst später: Anwendungen des EWP einer Matrix A
quadratische Form, Hauptachsentransformation

Aufgabe 1 *alt*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition von A bzgl. der $2-$ Norm in Abhängigkeit von ε.
Geben Sie die Kondition von A für $\varepsilon = 10^{-10}$ an.

b) Wohin strebt diese Kondition, falls $\varepsilon \longrightarrow 0$ strebt?

c) Für welche ε ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2 *alt*

a) Die lineare Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_4, -x_1 + 3x_3 - 3x_4, x_3 + x_4)$$

Bestimmen Sie je eine Basis von Kern und Bild der zur Standardbasis gehörenden Abbildungsmatrix A von $\mathcal{F}$.

b) Sei $V = C[-1,1]$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen, die auf dem Intevall $[-1,1]$ definiert sind. Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen X_i, $i = 1, 2$ ein Unterraum von V ist.

- $X_1 = \left\{ f \in V \,\middle|\, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^{k-1}, (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^5 \right\}$
- $X_2 = \left\{ f \in V \,\middle|\, f(x^2) = (f(x))^2 \text{ für alle } x \in [-1,1] \right\}$

Aufgabe 3 *alt*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} A, & -\pi \le x < -\frac{3\pi}{4} \\ 0, & -\frac{3\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{4} \\ -A, & \frac{3\pi}{4} \le x < \pi \end{cases} \tag{1}$$

$f(x)$ wird auf der ganzen reellen Achse $2\pi-$ periodisch fortgesetzt.

a) Graphische Darstellung von $y = f(x)$ für $A = 1.5$ auf dem Intervall $[-2\pi, \pi]$. Einheiten: $\pi \equiv 12$ Häuschen.
Was hat f für Eigenschaften?

f soll nun als Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$ dargestellt werden. Dazu brauchen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, sowie die a_k und b_k für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

b1) Bestimmen Sie $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ für $A \in \mathbb{R}$.

b2) Bestimmen Sie $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx$ für $A \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$

c) Bestimmen Sie $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$ für $A \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 4 *alt*

Bezüglich der Standardbasis Σ_e ist der linearen Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine neue Basis Σ_{neu} des $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Basistransformation $\mathcal{T}\colon \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$.
Geben Sie auch die Inverse von T an.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_{neu}.

c) Der Vektor x hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Wie lauten die Koordinaten von $\mathcal{F}(x)$ bzgl. Σ_{neu}?

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von x bzgl. Σ_e und daraus die Koordinaten von $\mathcal{F}(x)$ bzgl. Σ_e. Transformieren Sie letztere zu den Koordinaten von $\mathcal{F}(x)$ bzgl. Σ_{neu}.
Vergleich mit dem Resultat aus c).

Aufgabe 5 *alt*

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = h,\ 2h,\ 3h \tag{2}$$

im Intervall $[h, 3h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (2), um

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -1$, $b = 3$ und $f(x) = x^3$.
Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei? Feststellung? Haben Sie eine Erklärung zu Ihrem Resultat?

Aufgabe 6 *alt*

Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

a) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $\mathcal{F}$. (geometrische Interpretation)

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix P der Projektion auf den Kern von $\mathcal{F}$ bzgl der Standardbasis Σ_e.

c) Geben Sie eine neue ortho–normierte Basis Σ_{neu} so an, dass P_{neu} möglichst einfache Gestalt hat. Geben Sie ebenso P_{neu} an.

==

Aufgabe 7 *neu*

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1 - 6x_2 + k.$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch, welche Werte darf k annehmen.

c) Graphische Darstellung für $k = -9$: Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

Aufgabe 8 *neu*

a) Gesucht ist für $a > 0$ das bestimmte Integral

$$I = \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = 1 + \frac{x^2}{10}$$

Es soll mit der Unter- und Obersumme numerisch integriert werden mit äquidistanter Zerlegung des Intervalls $[0, a]$.

Wie gross muss $n \in \mathbb{N}$ sein, damit $O_n - U_n < \frac{a^2}{1000}$ erfüllt ist?

b) Gegeben ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$$

einer $3 \times 3-$ Matrix A. Wie gross sind die Determinante und die Spur von A? Weiter ist bekannt, dass $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte.

Aufgabe 9 *neu*

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem von A.

b) Geben Sie eine reguläre Matrix T an, sodass $T^{-1}AT = D =$ diagonal.

c) Ist es möglich, T in b) orthogonal anzugeben? (*mit* Begründung)

Aufgabe 10 *neue Basen*

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_a : \; a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_b : \; b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e : \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ae} von Σ_a nach Σ_e, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_e$ an.

b) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{be} von Σ_b nach Σ_e, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_e$ an.

c) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ab} von Σ_a nach Σ_b, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_b$ an.
(Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben ist der Vektor $\vec{q}_a = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_a$ bzgl. Σ_a.
Gesucht ist dieser Vektor bzgl. der anderen Basen Σ_e und Σ_b.

Aufgabe 11 *neu, numerische Integration*

a)

b)

Aufgabe 12 *neu, UR*

a) Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2.
Erzeugen die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x + 2x^2 \\ p_2(x) &= 3 + x \\ p_3(x) &= 5 - x + 4x^2 \\ p_4(x) &= -2 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

den Vektorraum V ?

b) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$:

$$U = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \qquad \text{und} \qquad W = \text{span}\{w_1, w_2\},$$

wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = (1, -2-5)^T \quad w_2 = (0, 8, 9)^T .$$

Studentin XYX behauptet, dass $U = W$, hat Sie Recht? (*mit* Begründung).

Aufgabe 13 *neu;lin Abb., Kern, Bild*

Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen $\mathcal{F}_k \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \colon \quad \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3) &= (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3) \\ \mathcal{F}_2 \colon \quad \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 0) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2$ die Abbildungsmatrizen A_k bzgl. der Standardbasis Σ_e.

b) Bestimmen Sie für A_k aus a) die entsprechenden Kerne, d.h. Kern$(A_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A_k x = 0 \right\}$.
Welche der beiden Abbildungen ist invertierbar?

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Zusammensetzung $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$.
Ist diese neue Abbildung umkehrbar?

Aufgabe 14 *neu*

a)

b)

Weitere Aufgaben

Aufgabe 15 *numerische Integration, Eigenwerte*

a) Gesucht ist für $a > 0$ das bestimmte Integral

$$I = \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = 1 + \frac{x^2}{10}$$

Es soll mit der Unter- und Obersumme numerisch integriert werden mit äquidistanter Zerlegung des Intervalls $[0, a]$.

Wie gross muss $n \in \mathbb{N}$ sein, damit $O_n - U_n < \frac{a^2}{1000}$ erfüllt ist?

b) Gegeben ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$$

einer $3 \times 3-$ Matrix A. Wie gross sind die Determinante und die Spur von A? Weiter ist bekannt, dass $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte.

Aufgabe 16 *alt*

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_b:\ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\ b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_c:\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e:\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{be} von Σ_b nach Σ_e, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_e$ an.

b) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ce} von Σ_c nach Σ_e, d.h. $\Sigma_c \longrightarrow \Sigma_e$ an.

c) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{bc} von Σ_b nach Σ_c, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_c$ an. (Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben ist der Vektor $\vec{a}_b = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b$ bzgl. Σ_b.

Gesucht ist dieser Vektor bzgl. der anderen Basen Σ_e und Σ_c.

Aufgabe 17 *alt, später MLAN4*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$(3) \qquad \dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Allgemeine Lösung $x_h(t)$ von (3) durch Entkopplung.

b) Spezielle Lösung von (3) mit x_0 als Anfangsbedingung.

c) Wie müssen die Anfangsbedingen gewählt werden, damit die Lösung $x(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ nicht unendlich gross wird?

Aufgabe 18 *alt, später MLAN4*

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 + 9.$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch.

c) Graphische Darstellung: Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

Aufgabe 19 *neu*

Gegeben ist die Matrix $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 5 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix T an, sodass $T^TAT = D =$ diagonal, Chabis!! geht gar nicht.

Aufgabe 20 *alt*

Wir betrachten den Vektorraum $V = C[0, 2\pi]$ der stetigen $2\pi-$ periodischen Funktionen. Sei $U \subset V$ ein Unterraum von V mit $U = \text{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\}$.

a) Wie gross ist die Dimension von U ?

b) Geben Sie die Ableitungen dieser ersten fünf Funktionen als Linearkombination dieser fünf Funktionen an und bestimmen Sie damit die $5 \times 5-$ Abbildungsmatrix D der Ableitung $\mathcal{D}$.

c) Bestimmen Sie Kern und Bild von D.

MLAN3 Lösungen Schlussprüfung 27.01.10

Lösung 1 *alt*

a) Bestimmung der EW von A: $\det(A - \lambda I_3) = p_A(\lambda) = (\lambda - 2\varepsilon)(-\lambda^2 + 2\lambda + 2) \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 2\varepsilon$ und $\lambda_{2.3} = 1 \pm \sqrt{3} \Longrightarrow \kappa(A) = \frac{1+\sqrt{3}}{2|\varepsilon|}$.

$\varepsilon = 10^{-10} : \kappa(A) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) 10^{10}$

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \kappa(A) = \infty$

c) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Lösung 2 *alt*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Kern: $Ax = 0$

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhält man das Endschema

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	-3	2	0	0
.	6	-4	3	0
.	.	3	$-\frac{3}{2}$	0
.	.	.	1	0

Rang$(A) = r = 4$, d.h. Kern$(A) =$ Nullpunkt, Dimension des Kerns ist gleich Null.

Bild(A) =span{Spalten von A} $= \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}\}$, $a^{(k)} = k-$ te Spalte von A.

b)
- Die Aufgabenstellung hätte so lauten müssen:

$$X_1 = \left\{ f \in V \middle| \, f(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k, (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ und $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$ aus X_1 folgt:

αf: $\alpha f(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3 + \alpha a_4 x^4 = (\alpha f)(x) \Longrightarrow \alpha f \in X_1$

$f + g$: $f(x) + g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4 = (f + g)(x) \Longrightarrow f + g \in X_1$

d.h. X_1 ist ein Unterraum von V:

X_1 =Projektion von $C[-1, 1]$ auf den Vektorraum der Polynome $4-$ ten Grades.

- Mit der Formulierung der Aufgabenstellung

$$X_1 = \left\{ f \in V \middle| \, f(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^{k-1}, (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

haben wir folgendes:

Mit $f(x) = \frac{a_0}{x} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ und $g(x) = \frac{b_0}{x} + b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3$ aus X_1 folgt:

αf: $\alpha f(x) = \alpha \frac{a_0}{x} + \alpha a_1 + \alpha a_2 x + \alpha a_3 x^2 + \alpha a_4 x^3 = (\alpha f)(x) \Longrightarrow \alpha f \in X_1$

$f+g$: $f(x)+g(x) = (\frac{a_0}{x} + a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3) + (\frac{b_0}{x} + b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3) = \frac{(a_0+b_0)}{x} + (a_1+b_1) + (a_2+b_2)x + (a_3+b_3)x^2 + (a_4+b_4)x^3 = (f+g)(x) \Longrightarrow f+g \in X_1$

D.h. die beiden Eigenschaften, die erfüllt sein sollten, sind erfüllt. **Für den Nachweis dieser beiden Eigenschaften habe ich bei der Korrektur die volle Punktzahl gegeben.**

X_1 ist trotzdem *kein* UR von $C[-1,1]$, da eine Funktion mit einem Term $\frac{1}{x}$ im Intervall $[-1,1]$ *nicht* stetig ist!

- $f(x^2) = (f(x))^2$

  αf: $\alpha f(x^2) \neq \alpha^2(f(x))^2 = (\alpha f(x))^2 \Longrightarrow X_2$ ist kein Unterraum.

Lösung 3 *alt*

a) graphische Darstellung,

Eigenschaften:

- f ist nicht stetig, hat zwei Sprungstellen
- $f(x)$ = ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$
- f ist stückweise konstant

b1) $a_0 = 0$, da f eine ungerade Funktion

b2) $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da f ungerade

c) $b_k = \frac{2}{\pi}(-A) \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} sin(kx)\,dx = 2\frac{A}{\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{array}{llcr}
k=1 & b_1 & = & \frac{1}{1}(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
k=2 & b_2 & = & \frac{1}{2}(1-0) \\
k=3 & b_3 & = & \frac{1}{3}(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
k=4 & b_4 & = & \frac{1}{4}(1-(-1)) \\
k=5 & b_5 & = & \frac{1}{5}(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
k=6 & b_6 & = & \frac{1}{6}(1-0) \\
k=7 & b_7 & = & \frac{1}{7}(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
k=8 & b_8 & = & \frac{1}{8}(1-1) \\
\ldots & & = & \ldots
\end{array}\right\} \cdot 2 \cdot \frac{A}{\pi}$$

Lösung 4 *alt*

a) $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A_{neu} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $x_{neu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow y_{neu} = A_{neu}x_{neu} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $x_{alt} = Tx_{neu} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und daraus $y_{alt} = Ax_{alt} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$y_{neu} = T^{-1}y_{alt} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ was mit dem Resultat aus c) übereinstimmen muss!

Lösung 5 *alt*

a) Zu lösende Gleichungen:

$$\begin{array}{rcccccc} i=0: & 2h & = & w_0 & + & w_1 & + & w_2 \\ i=1: & 4h^2 & = & w_0 h & + & w_1 2h & + & w_2 3h \\ i=2: & \frac{26h^3}{3} & = & w_0 h^2 & + & w_1 4h^2 & + & w_2 9h^2 \end{array}$$

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhält man das Endschema

w_0	w_1	w_2	1
1	1	1	$2h$
.	1	2	$2h$
.	.	2	$\frac{2h}{3}$

und damit: $w_0 = \frac{h}{3}$, $w_1 = \frac{4h}{3}$ und $w_2 = \frac{h}{3}$, also $Q = \frac{h}{3}\{f(h) + 4f(2h) + f(3h)\}$

b) $\xi \in [h, 3h] \longrightarrow x \in [a, b]:\ x = m\xi + q \Longrightarrow m = \frac{b-a}{2h} = \frac{4}{2h}$ und $q = \frac{3a-b}{2} = -3$,
also lautet die Transformation: $x = \frac{4}{2h}\xi - 3$ für $h \le \xi \le 3h$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = m\int_{h}^{3h} f(m\xi + q)\,d\xi \approx m \cdot Q = m \cdot \frac{h}{3}\left(f(mh+q) + 4f(m2h+q) + f(m3h+q)\right)$$

Transformation der Stützstellen:

$$\begin{array}{rcccl} mh+q & = & \frac{4}{2h}h - 3 & = & -1 \\ m2h+q & = & \frac{4}{2h}2h - 3 & = & 1 \\ m3h+q & = & \frac{4}{2h}3h - 3 & = & 3 \end{array} \Longrightarrow Q = \frac{2}{3}\left(f(-1) + 4f(1) + f(3)\right) = 20$$

Der exakte Wert des Integrals ist $\int_{-1}^{3} x^3\,dx = 20$, d.h. der absolute und der relative Fehler sind Null!, denn obige Quadraturformel ist die Methode von Simpson.
Bei dieser Methode wird der Fehler mit $\max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$ nach oben abgeschätzt und hier ist $f^{(4)}(x) \equiv 0$.

Lösung 6 *alt*

a) $\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) = 0 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dies ist die Koordinatengleichung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit dem Normalvektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P = I_3 - \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} = D = \text{diag}(1, 1, 0)$

$$\Sigma_{neu}\colon b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram–Schmidt für den Eigenraum von $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Alte Lösungen

Lösung 7

a) $p_A(\lambda) = (5-\lambda)\{\lambda^2 - 10\lambda + 20\} \stackrel{!}{=} 0$, $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_{2.3} = 5 \pm \sqrt{5}$

zugehörige Eigenvektoren: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

b) o.n. Basis Σ_{neu}: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

und damit: $T = (b_1 \; b_2 \; b_3) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung 8

a) Sei $b_1 = 1$, $b_2 = \cos(x)$, $b_3 = \sin(x)$, $b_4 = \cos(2x)$ und $b_5 = \sin(2x)$, d.h. $\dim(U) = 5$.

b) $\mathcal{D}(b_1) = 0$, $\mathcal{D}(b_2) = -b_3$, $\mathcal{D}(b_3) = b_2$, $\mathcal{D}(b_4) = -2b_5$ und $\mathcal{D}(b_5) = 2b_4$, also

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Kern}(D) = \text{span}\{e_1\}$ und $\text{Bild}(D)$ wird aufgespannt von den Spalten zwei bis fünf von D, also $\text{Bild}(D) = \text{span}\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$, wobei e_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^5$ ist.

Lösung 9

a) graphische Darstellung

b) $a_0 = A$ und $a_{2k-1}k = \frac{A}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{2}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $a_k = 0$ für k gerade.

c) $b_k = 0$, da eine ungerade Funktion über ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall integriert wird.

Lösung 10

a) EWP von A: $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t} v^{(3)}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, da A symmetrisch.
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$ mit den zugehörigen Eigenvektoren
$v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmung der c_k mit der AB x_0: $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{2}{3}$ und $c_3 = \frac{1}{3}$.

c) $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ so, dass $c_1 = c_2 = 0$:
$c_1 = \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma)$, $c_2 = \frac{1}{6}(\alpha - 2\beta + \gamma)$ und $c_3 = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

Lösung 11

$Q(x_1, x_2) = x^T A x - c^T x + 9 = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = \frac{3}{4} > 0$, d.h. es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ mit den EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

o.n. Basis Σ_{neu} wird von $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

In Σ_{neu} lautet der Kegelschnitt: $\frac{1}{2} x_{1neu}^2 + \frac{3}{2} x_{2neu}^2 - c_{neu}^T x_{neu} + 9 = 0$,

wobei $c_{neu} = T^T c = 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

quadratische Ergänzung: $\frac{1}{2}\left(x_{1neu} - 3\sqrt{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_{2neu} + \sqrt{2}\right)^2 = 3$ und damit
$\frac{\left(x_{1neu} - 3\sqrt{2}\right)^2}{6} + \frac{\left(x_{2neu} + \sqrt{2}\right)^2}{2} = 1$, d.h. die Ellpise hat die Halbachsen $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$ und den Mittelpunkt $M_{neu}(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Mittelpunkt im alten Koordinatensystem Σ_e: $M(4, 2)$

c) Graphische Darstellung: neues Koordinatensystem um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ verdreht ($\longrightarrow$ Richtungen der Hauptachsen) und Translation um den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($\longrightarrow$ Mittelpunkt).

Lösung 12

$x_{alt} = T x_{neu}$ für *jeden* Basiswechsel!

a)

$$T_{be} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ da } x_e = T_{be} x_b$$

b)

$$T_{ce} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ da } x_e = T_{ce} x_c$$

c) $T_{bc}:\ \Sigma_b \xrightarrow{T_{be}} \Sigma_e \xrightarrow{T_{ce}^{-1}} \Sigma_c$, also

$$T_{ce}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{bc} = T_{ce}^{-1}\,T_{be} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -13 \end{pmatrix}$$ Reihenfolge!

d) $\vec{a}_e = T_{be}\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ und $\vec{a}_c = T_{bc}\vec{a}_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ -17 \end{pmatrix}_c$ oder $\vec{a}_c = T_{ce}^{-1}\vec{a}_e$

Lösung 13

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1-2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2c-c^2$	$7-2c-\frac{3}{4}\,c^2$