

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1Bestimmen Sie mit einer Untersumme U_n approximativ den Wert von

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{wobei } f(x) = mx + q, m > 0.$$

Das Intervall $[a, b]$ soll dabei in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

- Geben Sie U_n an, Resultat so einfach wie möglich.
- Wohin strebt der Wert von U_n , falls $n \rightarrow \infty$?
- Wie viele Halbierungen müssen Sie für (1) machen, damit Sie mit der Methode von Simpson eine vorgegebene Toleranz ε einhalten?

Aufgabe 2a) Gegeben ist der Vektor $u^T = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Teilmenge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T u = 0 \right\}$$

aus \mathbb{R}^3 .Behauptung: U ist ein Unterraum in \mathbb{R}^3 .Überprüfen Sie diese Behauptung und geben Sie die Vektoren an, die U aufspannen. Wie gross ist die Dimension von U ? Geometrische Interpretation von U b) $z = 1 + w^2$, wobei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$.Für welche Argumente von w ist $\operatorname{Re}(z) = 0$, alle Lösungen.Tipp: w in Polarform.**Aufgabe 3**

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$(2) \quad Q = \sum_{k=0}^2 w_k f(\xi_k) \quad \text{mit } \xi_k = -h, h, 3h.$$

im Intervall $[-h, 3h]$.

- Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.
- Benützen Sie (2), um

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ und $f(x) = \cos(x)$.

Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Lösung 1 *Untersumme*

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \cdot \Delta x$, $k = 0, 1, 2 \dots n$ und damit

$$\begin{aligned} U_n &= \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \{m(a + k\Delta x) + q\} \\ &= \Delta x \left(n \cdot m \cdot a + \Delta x \cdot m \sum_{k=0}^{n-1} k + n \cdot q \right) \\ &= \Delta x \left(n \cdot m \cdot a + \Delta x \cdot m \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n \cdot q \right) \\ &= (b-a) \left\{ m \cdot a + (b-a) \frac{(n-1)}{2n} + q \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = (b-a) \left\{ m \cdot a + (b-a) \frac{1}{2} + q \right\} = m \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + q(b-a)$$

Es muss einmal halbiert werden, da die Mitte für Simpson gebraucht wird, ($f^{(4)} \equiv 0$).

Die Methode von Simpson ist für dieses Beispiel viel zu gut!

Bereits die Trapezmethode würde ohne Halbierung den exakten Wert liefern.

Lösung 2 \mathbb{C} , *Unterraum*

- a) • $a \in U, b \in U, a^T u = 0$ und $b^T u = 0 \implies (a+b)^T u = 0 \implies a+b \in U$
 • $a \in U, \mu \in \mathbb{R} \implies (\mu a)^T u = \mu(a^T u) = 0 \implies \mu a \in U$

D.h. $U \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum. $U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(U) = 2$.

Geometrisch: U ist eine Ebene durch den Nullpunkt orthogonal zu u .

- b) $w = e^{j\varphi}$ und damit $z = 1 + \cos(2\varphi) + j \sin(2\varphi) \implies 1 + \cos(2\varphi) = 0$
 und damit $\cos(2\varphi) = -1$, also $\varphi_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Lösung 3 *Quadratur mit Transformation*

- a) Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(3) \quad \begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 4h \\ -w_0 h + h w_1 + 3h w_2 = 4h^2 \\ w_0 h^2 + h^2 w_1 + 9h^2 w_2 = \frac{28h^3}{3} \end{cases}$$

Lösung von (3): $w_0 = w_2 = \frac{2h}{3}$ und $w_1 = \frac{8h}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärts einsetzen).

b) $[-h, 3h] \rightarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{4h} \cdot \xi + (a + \frac{b-a}{4})$, $-h \leq \xi \leq 3h$.

Umrechnung der Stützstellen:

$$\xi_0 = -h: x_0 = a \quad \xi_1 = h: x_1 = \frac{a+b}{2} \quad \xi_2 = 3h: x_2 = b$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx \approx Q = \frac{\pi}{4h} \cdot \frac{2h}{3} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + 4 \cdot \cos(0) + \cos(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{12} (\sqrt{2} + 4).$$

exakter Wert des Integrals: $I = \sqrt{2}$

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = |\frac{\pi}{12} (\sqrt{2} + 4) - \sqrt{2}|$ und

relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta I$. Relativer Fehler in Prozenten: $\delta I \cdot 100\%$.

Aufgabe 4 neu

Gegeben ist das Integral:

$$(4) \quad I = \int_{-1}^1 e^{-x} dx$$

I soll numerisch mit einer Obersumme bestimmt werden. Dabei soll das Intervall $[-1, 1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

- Wie gross muss n mindestens sein, um I mit einem absoluten Fehler kleiner $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen?
- Student X ist a) zu aufwendig. Er will (4) mit der Trapez-Methode numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?
- Student Z ist auch b) zu aufwendig. Er will (4) mit der Methode von Simpson numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

Aufgabe 5 alt

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

- Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A ?
- $U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U ?

Aufgabe 6 alt

- Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(5) \quad (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (5).

- Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ (= Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U , $\dim(U) = ?$

Aufgabe 7 alt

- Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der 3×3 -Matrizen.
Sei $U = \{A \in V \mid A^T = -A\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V ?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U ?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in \mathbb{R}^3 .

Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von \mathbb{R}^3 .

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \dots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k \cdot \frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k \cdot \frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-\frac{2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e} \right)$

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}, \text{Rang}(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
①	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k, k = 1, \dots, 4$, also $\text{span}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

und damit $\dim(U) = 4$.

Lösung 6

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2} \{ \sin(-x) + \sin(5x) \} = \frac{1}{2} \{ -\sin(x) + \sin(5x) \}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos(x) - \frac{1}{5} \cos(5x) \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
①	0	1	0	0
.	①	-1	0	0
.	.	①	-1	0
.
.
.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 7

- a) • Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A + B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A + B) \Rightarrow A + B \in U$
• sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V , $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8

- a)
- b)
- c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}a^2$

- a)
- b)
- c)
- d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3 + \mu, -3 + 7\mu, 1 + 3\mu)$ und damit $\vec{FA} = \begin{pmatrix} 5 - \mu \\ 6 - 7\mu \\ 4 - 3\mu \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{FA} = 0 \implies \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \vec{r} = \vec{OA} + \mu \vec{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2\vec{AF} \implies A'(-6, 5, 3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	$\textcircled{-1}$	-2	1
1	0	0	-1	$\textcircled{-5}$	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\textcircled{\frac{27}{5}}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
$\textcircled{1}$	0	1	-2	2
.	$\textcircled{1}$	-2	3	-1
.	.	$\textcircled{7}$	-6	5
.	.	.	.	2