Klassen WI08ab **MLAN3 zweiter Test** 20. November 2009

Name:

Aufgabe 1

Unterräume:

a) Gelöst wird $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ gibt es Lösungen?

Alle diese Vektoren, für die es Lösungen gibt, bilden im $\mathbb{R}^3$ einen Unterraum U.

Geben Sie für U eine Basis an und bestimmen Sie dim(U).

b) Sei $V = \mathbb{R}^4$. Wir betrachten die folgenden Teilmengen:

$$T_1 = \left\{ (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)^T \,\middle|\, a_3 \neq 0 \right\} \qquad T_2 = \left\{ (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)^T \,\middle|\, a_1 + a_4 = 0 \right\}$$

Prüfen Sie nach, ob T_k, $k = 1, 2$ in V ein Unterraum ist und wenn ja, geben Sie eine Basis an.

Aufgabe 2

Lineare Abbildungen:

a) Ein achsenparalleles Quadrat in der x_1x_2- Ebene mit der linken unteren Ecke $P_1(1, -1)$ und der Seitenlänge $s = 2$ wird mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ in die y_1y_2- Ebene abgebildet.

Graphische Darstellung von Urbild und Bild, Einheiten auf beiden Achsen jeweils 2 Häuschen.

Was ist das Bild des Quadrates, wie gross ist der neue Flächeninhalt?

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bzgl. der Standardbasis Σ_e folgender Abbildung $\mathcal{F}$:

zuerst wird mit dem Faktor $\mu = 2$ gestreckt, anschliessend folgt eine Rotation um die x_2- Achse um den Winkel $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ und schliesslich wird an der Ebene $E\colon x_1 = x_2$ gespiegelt.

Wie gross ist die Determinante der Abbildungsmatrix?

Aufgabe 3

Orthogonal-Projektion einer Funktion $f \in C[a, b]$ auf den Unterraum $U = \text{span}\{1, x, x^2\}$:

a) Approximieren Sie $f(x) = \sin(\pi x)$ auf $[-1, 1]$ durch ein quadratisches Polynom $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

b) Bestimmen Sie den dabei gemachten mittleren quadratischen Fehler.

WI08ab MLAN3 Lösungen zweiter Test 20.11.09

Lösung 1

a) Endschema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & b_2 - \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \text{VB: } b_1 - b_2 + b_3 = 0$$

D.h. $b = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, somit $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\dim(U) = 2$.

b) T_1 ist kein UR in V, denn mit $a \in T_1$ und $b \in T_1$ gilt:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin T_1$$

T_2 ist ein Unterraum, denn mit $a \in T_2$ und $b \in T_2$ gilt:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -a_1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -b_1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ -a_1 - b_1 \end{pmatrix} \in T_2$$

und mit $a \in T_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -a_1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \\ -\alpha a_1 \end{pmatrix} \in T_2$$

$$T_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim\,(T_2) = 3$$

Lösung 2

a) Graphische Darstellung

Bild des Quadrates ist ein Parallelogramm, $F_{\text{alt}} = 4$ und $F_{\text{neu}} = F_{\text{alt}} \cdot \det(A) = 12$

b) $A =$ Abbidlungsmatrix von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e:

$$A = S_E \cdot D_{\varphi_2} \cdot Z_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -8$

Lösung 3

Vektorraum $V = C[-1,1]$ mit Skalarprodukt $(f,g) := \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$.
Nur Integrale über eine gerade Funktion ergeben Beiträge verschieden von Null.

a) $d(x) := \sin(\pi x) - p_2(x)$, wobei

$$\left\{\begin{array}{ccc} (d(x),1) & = & 0 \\ (d(x),x) & = & 0 \\ (d(x),x^2) & = & 0 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & = & 2a_0 & & +\frac{2}{3}a_3 \\ \frac{2}{\pi} & = & & \frac{2}{3}a_1 & \\ 0 & = & \frac{2}{3}a_0 & & +\frac{2}{5}a_3 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & \frac{3}{\pi} \\ a_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

also $p_2(x) = \frac{3}{\pi}\cdot x$, $-1 \le x \le 1$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot\left\|\sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}\cdot x\right\|_2^2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}\cdot x, \sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}\cdot x\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{1}\left[(\sin(\pi x))^2 - \frac{6}{\pi}\cdot x\sin(\pi x) + \frac{9}{\pi^2}\cdot x^2\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{6}{\pi^2}\right) \end{aligned}$$