Klassen WI08ab **MLAN3 zweiter Test, Wiederholung** 11. Dezember 2009

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_0^T A x = 0 \right\}$$

- Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
- Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U.

b) Sei $V = \mathbb{P}_6$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 6.

Wir betrachten die folgenden Teilmengen:

- $X_1 := \left\{ p(x) \in V \,\middle|\, p(0) = 1 \right\}$
- $X_2 := \left\{ p(x) \in V \,\middle|\, p(x) = -p(-x) \right\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Prüfen Sie nach, ob X_k, $k = 1, 2$ in V ein Unterraum ist und wenn ja, geben Sie eine Basis und die Dimension an.

Aufgabe 2

a) Approximieren Sie $f(x) = 1 + x$ auf $[0, 2\pi]$ durch ein trigonometrisches Polynom höchstens zweiter Ordnung.

b) Student XXY behauptet mit

$$(f, g) := f(a) \cdot g'(a) + \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

sei auf $V = C^1[a, b]$ ein Skalarprodukt gegeben. Bestätigen oder widerlegen Sie seine Behauptung.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den Vektorraum

$$V := \mathbb{P}_4 = \text{span}\left\{1, t, t^2, t^3\right\}$$

der Polynome höchstens $4-$ ten Grades.

a) Zeigen Sie, dass in V die Abbildung

$$\mathcal{F} \colon p(t) \longmapsto q(t) = \frac{d}{dt} p(t) - p(t)$$

linear ist.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A bzgl. der Basis $\left\{1, t, t^2, t^3\right\}$.

WI08ab MLAN3 Lösungen zweiter Test, Wiederholung 11.12.09

Lösung 1

a)
- Mit $a \in U$, $v_0^T Aa = 0$ und $b \in U$, $v_0^T Ab = 0$ folgt: $v_0^T A(a+b) = 0 \Longrightarrow a+b \in U$
  Mit $a \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt: $v_0^T A(\alpha a) = \alpha \cdot v_0^T Aa = 0 \Longrightarrow \alpha a \in U$
  d.h. U ist ein Unterraum im $\mathbb{R}^3$.
- $v_0^T Ax = 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 0 \Longrightarrow x = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$, zwei freie Parameter.
  Also $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, d.h. $\dim(U) = 2$.

b)
- $X_1:$ mit $p_1 \in X_1$ und $p_2 \in X_1$ folgt: $p_1(0) + p_2(0) = 2 \neq 1 \Longrightarrow p_1 + p_2 \notin X_1$,
  d.h. X_1 ist kein Unterraum in V.
- $X_2:$ mit $p_1 \in X_2$ und $p_2 \in X_2$ folgt: $p_1(x)+p_2(x) = -p_1(-x)-p_2(-x) = -(p_1(-x)+p_2(-x))$
  $\Longrightarrow p_1 + p_2 \in X_2$.
  Mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $p \in X_2$ folgt: $\mu \cdot p(x) = -\mu \cdot p(-x) \Longrightarrow \mu p \in X_2$,
  d.h. X_2 ist ein Unterraum in V.
  $X_2 = \text{span}\{x, x^3, x^5\}$ = Unterraum der ungeraden Polynome in V, $\dim(X_2) = 3$.

Lösung 2

a) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2 + 2\pi$,

$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,dx = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,dx = -\frac{2}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

Somit: $f(x) \approx (1+\pi) - 2 \cdot \sin(x) - 1 \cdot \sin(2x)$

b) $(f, g) \neq (g, f)$, d.h. das vorgeschlagene Produkt ist nicht symmetrisch!, ist also kein Skalarprodukt.

Lösung 3

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(p_1(t) + p_2(t)) &= \frac{d}{dt}(p_1(t) + p_2(t)) - (p_1(t) + p_2(t)) \\
&= \frac{d}{dt}p_1(t) - p_1(t) + \frac{d}{dt}p_2(t) - p_2(t) \\
&= \mathcal{F}(p_1(t)) + \mathcal{F}(p_2(t)) \\
\mathcal{F}(\mu \cdot p(t)) &= \frac{d}{dt}(\mu \cdot p(t)) - (\mu \cdot p(t)) \\
&= \mu \cdot \left(\frac{d}{dt}p(t) - p(t) \right) = \mu \cdot \mathcal{F}(p(t))
\end{aligned}$$

b)

$$\mathcal{F}(1) = -1 \qquad \mathcal{F}(t) = 1 - t \qquad \mathcal{F}(t^2) = 2t - t^2 \qquad \mathcal{F}(t^3) = 3t^2 - t^3$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$