
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine reguläre Matrix T an, sodass $T^{-1}AT = D =$ diagonal.

b) Ist es möglich, T in a) orthogonal anzugeben? (*mit* Begründung)

Aufgabe 2

a) Gesucht ist für $b > 0$ das bestimmte Integral

$$I = \int_0^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = 2 + \frac{x^2}{10}$$

Es soll mit der Unter- und Obersumme numerisch integriert werden mit äquidistanter Zerlegung des Intervalls $[0, b]$.

Wie gross muss $n \in \mathbb{N}$ sein, damit $O_n - U_n < \frac{b^2}{1500}$ erfüllt ist?

b) Gegeben ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$$

einer $3 \times 3-$ Matrix A. Wie gross sind die Determinante und die Spur von A? Weiter ist bekannt, dass $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte.

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen $\mathcal{F}_k \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\colon \quad \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3) &= (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3) \\ \mathcal{F}_2\colon \quad \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 0) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2$ die Abbildungsmatrizen A_k bzgl. der Standardbasis Σ_e.

b) Bestimmen Sie für A_k aus a) die entsprechenden Kerne, d.h. Kern$(A_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A_k x = 0 \right\}$.

Welche der beiden Abbildungen ist invertierbar?

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Zusammensetzung $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$.

Ist diese neue Abbildung umkehrbar?

Bitte wenden.

Aufgabe 4

Gegeben sind die drei Basen

$\Sigma_a: \ a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_b: \ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e: \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ae} von Σ_a nach Σ_e, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_e$ an.

b) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{be} von Σ_b nach Σ_e, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_e$ an.

c) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ab} von Σ_a nach Σ_b, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_b$ an.
(Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben ist der Vektor $\vec{q}_a = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_a$ bzgl. Σ_a.
Gesucht ist dieser Vektor bzgl. der anderen Basen Σ_e und Σ_b.

Aufgabe 5

a) Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2.
Erzeugen die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x + 2x^2 \\ p_2(x) &= 3 + x \\ p_3(x) &= -x + 4x^2 \\ p_4(x) &= -2 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

den Vektorraum V ?

b) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$:

$$U = \text{span}\,\{u_1, u_2, u_3\} \qquad \text{und} \qquad W = \text{span}\,\{w_1, w_2\}\,,$$

wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = (1, -2 - 5)^T \quad w_2 = (0, 8, 9)^T\,.$$

Student ZYX behauptet, dass $U = W$, hat er Recht? (*mit* Begründung).

Aufgabe 6

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1 - 6x_2 + k.$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch, welche Werte darf k annehmen.

c) Graphische Darstellung für $k = -9$: Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

Lösung 1

a) EWP von A:
EW: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$
zugehörige EV:

$$v^{(1)} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v^{(1)} = \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}.$$

also Σ_{neu}:

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1}AT =$diag$(2, 2, 1)$.

b) Nein, da $b^{(3)} \not\perp b^{(1)}$ und $b^{(3)} \not\perp b^{(2)}$.

Lösung 2

a) $O_n - U_n = \Delta x(f(b) - f(0)) = \frac{b}{n}(2 + \frac{b^2}{10} - 2) = \frac{b^3}{10n} < \frac{b^2}{1500} \Longrightarrow n > 150b$.

b) $n = 3$: $p_A(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 \cdot \text{Spur}(A) \cdot \lambda^2 + c_1\lambda + \det(A)$, also Spur$(A) = 2$ und $\det(A) = -5$.
$\frac{1}{2} + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ und $\frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -5 \Longrightarrow \lambda_2 = -\frac{5}{2}$ und $\lambda_3 = 4$.

ABER!!

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ist so, wie die Aufgabe gestellt ist *kein* Eigenwert. Es sollte

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{8}$$

sein. Damit werden $\lambda_{2.3} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Lösung 3

a) $\mathcal{F}_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{F}_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Gauss–Algorithmus, Endschema $A_1 x = 0$:

x_1	x_2	x_3	1
1	.	.	0
.	1	.	0
.	.	1	0

d.h. Kern$(A_1) = \{0\}$

Gauss–Algorithmus, Endschema $A_2 x = 0$:

x_1	x_2	x_3	1
1	-1	.	0
.	2	1	0
.	.	.	.

d.h. Kern$(A_2) = \text{span}\ \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{F}_1$ ist invertierbar, da A_1 regulär, det$(A_1) \neq 0$

$\mathcal{F}_2$ ist nicht invertierbar, da A_2 singulär, det$(A_2) = 0$

c) $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsmatrix

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}$ ist nicht umkehrbar, da det$(A) = 0$.

Lösung 4

a) $T_{ae} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $x_e = T_{ae} \cdot x_a$

b) $T_{be} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mit $x_e = T_{be} \cdot x_b$

c) $x_b = T_{ab} x_a$, $x_a = T_{ae}^{-1} x_e$ und $x_b = T_{be}^{-1} x_e \Longrightarrow T_{be}^{-1} x_e = T_{ab} T_{ae}^{-1} x_e$ und damit $T_{be}^{-1} = T_{ab} T_{ae}^{-1}$, schliesslich $T_{ab} = T_{be}^{-1} T_{ae}$.

$$T_{be}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T_{ab} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

d) $\vec{q}_b = T_{ab} \vec{q}_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}_b$ und $\vec{q}_e = T_{ae} \vec{q}_a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}_e$

Lösung 5

a) Basis: $b^{(1)} := 1$, $b^{(2)} := x$ und $b^{(3)} := x^2$, d.h. dim$(\mathbb{P}_2) = 3$

Gauss–Algorithmus, Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	3	0	-2	0
.	4	-1	-4	0
.	.	$\frac{5}{2}$	.	0

Der Rang $r = 3$, d.h. die vier Polynome sind erzeugend.

b) Gauss–Algorithmus, Endschema:

α_1	α_2	α_3	1
1	2	-1	0
.	1	-1	0
.	.	.	.

Rang $r = 2$, d.h. $U =$span$\{u_1, u_2\}$, u_3 ist von u_1 und u_2 linear abhängig, $u_3 = u_1 - u_2$.

$\mathrm{dim}(U) = \mathrm{dim}(W) = 2$
$w_1 = -u_3$ und $w_2 = 2u_1 - u_2 \Longrightarrow U \equiv W$
Student ZYX hat Recht.

Lösung 6

$Q(x_1, x_2) = x^T A x + c^T x + k = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = 8 > 0:$ es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$

zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu_1 \in \mathbb{R}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$.

Also $\Sigma_{\text{neu}}:\ b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $T = \left(b^{(1)}, b^{(2)}\right)$, **orthogonal!**

$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = 4x_{\text{neu}_1}^2 + 2x_{\text{neu}_2}^2 + c_{\text{neu}}^T x_{\text{neu}} + k = 0$ mit $c_{\text{neu}}^T = c^T T = \frac{1}{\sqrt{2}}(8, -20)$,

also (nach quadratischer Ergänzung)

$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = 4\left(x_{\text{neu}_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(x_{\text{neu}_2} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 27 - k,\ k < 27$

$M_{\text{neu}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow M_{\text{alt}}\,(-3, 2)$

c) $k = -9:$, $27 - k = 36$, d.h. $a = 3$ und $b = 3\sqrt{2}$

$$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = \frac{\left(x_{\text{neu}_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} + \frac{\left(x_{\text{neu}_2} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}{18} = 1$$

Figur.