Klasse WI09t **MLAN1 – Schlussprüfung** 22. Januar 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe 1

a) Gegeben sind

$$\sum_{k=2}^{21} (4x_{k-1} - 2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{20} (2x_k - 1)^2 = 0$$

Bestimmen Sie damit die Summe

$$s_a = \sum_{j=1}^{20} \left\{ 2x_j - 3 \cdot \sum_{l=1}^{20} (-x_l + 2)^2 \right\}.$$

b) Gegeben ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $s_b = \sum\limits_{k=1}^{4} \left(\sum\limits_{l=1}^{3} a_{kl} \right)$.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 3$ und dem Mittelpunkt $M_1(2,1)$. Bestimmen Sie die Radien derjenigen Kreise k mit dem Mittelpunkt $M(6,4)$, die k_1 berühren, sowie die entsprechenden Berührungspunkte. (*alle* Lösungen)

Machen Sie eine Skizze, bevor Sie "drauflos" rechnen.

b) Gegeben sind zwei Kreise

$$\begin{aligned} k_1: &\quad x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0 \\ k_2: &\quad x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Mittelpunkte.

Aufgabe 3

Gegeben sind zwei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 2x + y - 4z = 0 \\ E_2: &\quad -x + 2y + 3z + 1 = 0 \end{aligned}$$

sowie ein Punkt $P(-2,5,0)$.

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g durch P, die parallel zu beiden Ebenen ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E durch P, die senkrecht auf beide Ebenen steht.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssytem

a) genau eine Lösung,

b) eine ein-parametrige Lösung,

c) eine zwei-parametrige Lösung,

d) keine Lösung?

Geben Sie für a) - c) die entsprechenden Lösungen an.

Aufgabe 5

a) Gesucht ist X so, dass

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

gültig ist. Ist X regulär, bzw. invertierbar? (*mit* Begründung)

b) Wie müssen die Koeffizienten a, b und c gewählt werden, damit das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & - & 3z & = & -3 \\ -2x & - & by & + & cz & = & -1 \\ ax & + & 3y & - & cz & = & -3 \end{array} \right.$$

die Lösung $x = 1$, $y = -1$ und $z = 2$ hat?

Aufgabe 6

Die Grundfläche $ABCD$ eines Würfels $ABCDEFGH$ liegt in der Ebene $E\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$.
Bestimmen Sie die Koordinaten derjenigen Würfelecke mit der grössten $z-$ Koordinate.
Gegeben sind die Würfelecken $A(5, 4, 4)$ und $C(1, 0, 2)$.

MLAN1 Lösungen Schlussprüfung 22.01.10

Lösung 1

a)
$$\sum_{k=1}^{20} x_k = 10 \qquad \sum_{k=1}^{20} x_k^2 = 5 \qquad \sum_{l=1}^{20} (-x_l+2)^2 = 45 \implies s_a = \sum_{j=1}^{20} (2x_j - 135) = -2680.$$

b) $s_b =$ Summe aller Matrizenelemente, zeilenweise:

$$\begin{aligned} s_b &= (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23}) + (a_{31}+a_{32}+a_{33}) + (a_{41}+a_{42}+a_{43}) \\ &= 4+6+6+0 = 16 \end{aligned}$$

Lösung 2

a) $g = g(M_1, M_2)$, $g \cap k_1 = \{B_1, B_2\}$
$g\colon y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \Rightarrow g \cap k_1\colon 25x^2 - 100x - 44 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{22}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$ und damit $y_1 = \frac{14}{5}$, $y_2 = -\frac{4}{5}$,
also $B_1\left(\frac{22}{5}, \frac{14}{5}\right)$ und $B_2\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
Aus der Figur: Abstand d der beiden Mittelpunkte $d = 5$ und damit: $r_1 = 2$ und $r_2 = 8$.

b) Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} k_1: &\quad (x+2)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad M_1(-2,-3) \quad r_1 = 5 \\ k_2: &\quad (x+4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad M_2(-4,3) \quad r = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und damit: Abstand $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = 2\sqrt{10}$.

Lösung 3

a) Gauss–Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
-1	2	3	-1
.	5	2	-2

und daraus folgt:

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

b) alle Ebenen $E \perp g$: $\frac{11}{5}x - \frac{2}{5}y + z + D = 0$ und $P \in E$: $D = \frac{32}{5} \implies E\colon 11x - 2y + 5z + 32 = 0.$

Lösung 4

vollständige Diskussion:

$\alpha = 0$:

x	y	z	1
.	.	β	2
.		4	4
.	.	2	β

$\Longrightarrow$

x	y	z	1
.	.	1	1
.		.	$\beta - 2$
.	.	.	$2 - \beta$

also:

d) keine Lösung, falls $\alpha = 0$ und $\beta \neq 2$.

c) zwei-parametrige Lösung, falls $\alpha = 0$ und $\beta = 2$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

$\alpha \neq 0$:

x	y	z	1
α	.	β	2
.	α	2	β
.	.	$2 - \beta$	$2 - \beta$

also

b) ein-parametrige Lösung, falls $\alpha \neq 0$ und $\beta = 2$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{2}{\alpha} \\ -\frac{2}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

und schliesslich

a) genau eine Lösung, falls $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 2$:

x	y	z	1
α	.	β	2
.	α	2	β
.	.	1	1

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}(2 - \beta) \\ \frac{1}{\alpha}(\beta - 2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2 \times 2-$ Matrix, damit das Produkt definiert ist.

Linke Seite der Gleichung, erste und zweite Zeile von X:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 3b & = & -5 \\ -a & & & = & -1 \\ 2a & + & b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} c & + & 3d & = & 6 \\ -c & & & = & -3 \\ 2c & + & d & = & 7 \end{array} \right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

X ist regulär, da $\det(X) = 7 \neq 0$.

b) x, y und z einsetzen liefert ein Gleichungssystem für a, b und c.

Gauss–Algorithmus, Endschema:

a	b	c	1
1	-1	0	3
.	1	2	1
.	.	1	1

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 6

Normalvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt M von $\overline{AC}$: $M(3,2,3)$.

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6$, $\left|\overrightarrow{MC}\right| = |\vec{n}| = 3$.

$\overrightarrow{MB} \perp \vec{n}$ und $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC} \Longrightarrow \overrightarrow{MB} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 3 \Longrightarrow \mu = \pm 2$

und schliesslich $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \mp 2 \\ \pm 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{0M} + \overrightarrow{MB}$ liefert die beiden Eckpunkte B und D, also
$B(1,3,5)$ und $D(5,1,1)$. Für die Ecken $EFGH$ wird $\sqrt{2} \cdot \vec{n}$ gebraucht, also
Ecke mit der grössten $z-$ Koordinate: $\overrightarrow{0F} = \overrightarrow{0B} + \sqrt{2} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ 5+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

d.h. $F\left(1+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, 5+2\sqrt{2}\right)$.