Klasse WI09b **MLAN1 - Test 2** 20. November 2009

Name:

Aufgabe 1

a) Gesucht ist X so, dass die Gleichung $AX = B$ erfüllt ist.
Dabei ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Von der folgenden EKM wird behauptet, dass sie reduzierte Zeilenstufenform aufweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b_1) Begründen oder widerlegen Sie diese Behauptung und führen Sie nötigenfalls die fehlenden Schritte noch durch.

b_2) Die EKM gehöre zu einem Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer *einspaltigen* rechten Seite b. Geben Sie die entsprechende Lösungsmenge an.

b_3) Die EKM gehöre zu einem Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer *zweispaltigen* rechten Seite b. Geben Sie die entsprechende Lösungsmenge an.

Aufgabe 2
Gegeben ist die Ebene E mit den Achsenabschnitten $a = 6$, $b = -2$ und $c = 5$, und die Gerade g durch die Punkte $P = (4, -2, 0)$ und $Q = (0, -1, 5)$.

a) Bestimmen Sie den Durchstosspunkt von g mit E.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade s_1 von E mit dem Grundriss.

Aufgabe 3

a) Diskutieren Sie das folgende lineare Gleichungssystem vollständig, unter Angabe der entsprechenden Lösungsmengen und geometrischen Interpretationen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ux_1 & + & 9x_2 & = & u^2 \\ x_1 & + & ux_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

b) Gegeben ist der Kreis K mit Radius $R = 3$ um den Mittelpunkt $M = (2, 1)$. Bestimmen Sie die Radien derjenigen Kreise um den Mittelpunkt $N = (6, 4)$, die K berühren, sowie die entsprechenden Berührungspunkte.

MLAN1 Lösungen zweiter Test 20.11.09

Lösung 1

a) Gauss-Algorithmus mit mehreren rechten Seiten. Die reduzierte Zeilenstufenform lautet:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) b_1) Die EKM ist nicht in reduzierter Zeilenstufenform. Richtig lautet diese:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b_2) Mit einer einspaltigen rechten Seite lautet die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b_3) Mit einer zweispaltigen rechten Seite lautet die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ x = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 8 & -1 \\ 9 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 2

a) Koordinatengleichung für E: $\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{5} = 1$.

Parameterdarstellung für $g = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Durchstosspunkt $D = g \cap E \Longrightarrow \mu = 4$ und damit $D = (-12, 2, 20)$.

b) Die Gerade s_1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems bestehend aus den Koordinatengleichungen von E und der Grundrissebene ($z = 0$). Die EKM lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 6 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad s_1 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 3 ****

a) Tableau nach einem Schritt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & u & 3 \\ 0 & 9 - u^2 & u^2 - 3u \end{array}\right)$$

- genau eine Lösung: $u \neq \pm 3$. Zwei sich schneidende Geraden $S = g_1 \cap g_2$
  $x_1 = \frac{u^2+3u+9}{u+3}$, $x_2 = -\frac{u}{u+3}$
- $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $u = 3$. Zwei zusammenfallende Geraden $g_1 \equiv g_2$
  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- keine Lösung: $u = -3$. $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$

b) vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten ohne Widerspruch,

Tableau nach 2 Schritten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -b-1 \\ 0 & 0 & a & -3+2b \end{array}\right)$$

Abbruch, falls $a = 0$, ohne Widerspruch, falls VB erfüllt: $b = \frac{3}{2}$ und somit die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$