Klasse WI09t **MLAN1 - zweiter Test** 20. November 2009

Name:

Geometrie
`rref`, `ref`
Diskussion eines Gleichungssystems, geometrische Interpretation

Aufgabe 1

a) Gesucht ist X so, dass $AX = B$ erfüllt ist. Dabei sind $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Von folgendem Tableau wird behauptet, dass es in `rref` sei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Begründen oder widerlegen Sie diese Behauptung.
- Es wurde $Ax = b$ mit einer rechten Seite gelöst: geben Sie die entsprechende Lösung an.
  (m, n, r und Anzahl freie Prameter)
- Es wurde $Ax = b_k$, $k = 1, 2$ mit zwei rechten Seiten simultan gelöst: geben Sie die entsprechenden Lösungen an.
  (m, n, r und Anzahl freie Prameter)

Aufgabe 2 *Geometrie*

Gegeben sind eine Ebene E mit den Achsenabschnitten $a = 6$, $b = -2$ und $c = 5$, sowie eine Gerade g, die durch die Punkte $S_1(4, -2, 0)$ und $S_2(0, -1, 5)$ geht.

a) Bestimmen Sie den Durchstosspunkt von g mit der Ebene E.

b) s_1 ist die Schnittgerade von E mit dem Grundriss. Bestimmen Sie den Abstand vom Ursprung zu s_1.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} ux_1 & + & 9x_2 & = & u^2 \\ x_1 & + & ux_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

Führen Sie für (1) eine vollständige Diskussion der Lösungen durch, inkl. geometrische Interpretation.

b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccl} 3x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & 2 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & b & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 1 & = 0 \end{array} \right.$$

Bestimmen Sie in (2) a und b so, dass die Lösung in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann.

MLAN1 Lösungen zweiter Test 20.11.09

Lösung 1

a) Gauss-Algorithmus mit mehreren rechten Seiten:
Endtableau:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Das gegebene Tableau ist nicht in `rref`, die `rref` ist:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = b$

  $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  $m = 4$, $n = 5$, $r = 4$, $n - r = 1$ freier Parameter
  Lösungen:

  $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

- $Ax = b_k$, $k = 1, 2$

  $$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  $m = 4$, $n = 4$, $r = 4$, $n - r = 0$, kein freier Parameter
  Lösungen:

  $$X = \left(x^{(1)} x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 8 & -1 \\ 9 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  wobei $x^{(k)}$ die Lösung von $Ax = b_k$, $k = 1, 2$ ist.

Lösung 2

a) $E\colon \frac{x}{6}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{5}=1$ und $g\colon \vec{r}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$. $D=g\cap E \Longrightarrow \mu=4$

und damit $D(-12,2,20)$.

b) Grundriss $(z=0)$, $xy-$ Ebene, also $s_1\colon y=-2+\frac{x}{3}$

Lot l zu s_1 durch Null, $l\colon y=-3x$, $S=g\cap l \Longrightarrow S\left(\frac{3}{5},-\frac{9}{5}\right)$, also $d=|\overrightarrow{0S}|=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{10}$.

Lösung 3

a) Tableau nach einem Schritt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & u & 3\\ 0 & 9-u^2 & u^2-3u\end{array}\right)$$

- genau eine Lösung: $u\neq\pm3$. Zwei sich schneidende Geraden $S=g_1\cap g_2$
  $x_1=\frac{u^2+3u+9}{u+3}$, $x_2=-\frac{u}{u+3}$
- $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $u=3$. Zwei zusammenfallende Geraden $g_1\equiv g_2$
  $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$.
- keine Lösung: $u=-3$. $g_1\parallel g_2$ und $g_1\neq g_2$

b) vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten ohne Widerspruch,

Tableau nach 2 Schritten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -3 & -b-1\\ 0 & 0 & a & -3+2b\end{array}\right)$$

Abbruch, falls $a=0$, ohne Widerspruch, falls VB erfüllt: $b=\frac{3}{2}$ und somit die Lösungen:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\qquad \mu\in\mathbb{R}.$$