Klassen SI08a, UI08bc, ME07a **MNM – Schlussprüfung** 16. Juni 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 2

a) Studentin XXY behauptet, für

$$(1) \qquad H(b) = \sqrt{4 - b^2} \qquad b \longrightarrow 2 \quad \text{und} \quad b < 2$$

könne sie die Auslöschung vermeiden. Hat sie Recht? (*mit* Begründung)

b) Welche der folgenden Abbildungen $n_* \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm?

i) $n_1(x) = 2|x_2| + x_3^2$, wobei $x \in \mathbb{R}^3$.

ii) $n_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{4} \gamma_k \cdot |x_k|$, wobei $\gamma_k = \frac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, 3, 4$ und $x \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_1$-Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die beiden fehlerbehafteten rechten Seiten

$$\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden fehlerbehafteten Lösungen in b) jeweils den entsprechenden relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_k\|_1$, $k = 1, 2$, und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 4

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0\,. \tag{2}$$

Die Nullstellen von (2) sollen mit der Iteration

$$x_{k+1} = 2 - x_k^2 \tag{3}$$

und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ bestimmt werden.

a) Erhalten Sie mit (3) eine der beiden Nullstellen von (2)?
(*mit* Begründung) graphische Darstellung, Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 2$ Häuschen.

Falls Sie a) mit einem Nein beantworten, werden folgende Auswege betrachtet:

bi) Beschleunigung von (3) mit Steffensen: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ den Wert $x_0^{(1)}$ und bestimmen Sie damit

$$q_{\text{Steffensen}} \approx \left| \frac{x_0^{(1)} - s}{x_0 - s} \right|.$$

.

bii) Methode von Newton für (2): bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ die Werte x_1 und x_2. Ist die Konvergenzbedingung für x_0 erfüllt?

Welcher der beiden Werte $x_0^{(1)}$ und x_2 ist qualitativ besser?

Aufgabe 5

Es sei m eine reelle Zahl und $|\mu| < 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = m - \mu \cdot \sin(x) \tag{4}$$

im Intervall $[m - \pi,\, m + \pi]$ eine eindeutige Lösung hat.
(Banach'scher Fixpunktsatz über das Iterationsverfahren $x = F(x)$)

- Bevor Sie rechnen: graphische Darstellung von (4) für $m = 2$ und $\mu = 0.75$.
- Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen, d.h. $\pi \mathrel{\hat{=}} 12$ Häuschen.

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{1} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{5}$$

im Intervall $[-1, 1]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (5) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 1 exakt integriert werden.

b) Testen Sie (5) mit den Gewichten aus a) mit dem Polynom $p_3(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$.
Wie gross wird dabei der Integrationsfehler?

c) Benützen Sie (5), um das Integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = 0$, $b = \pi$ und $f(x) = \sin(x)$.
Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Viel Erfolg!

MNM **Lösungen Schlussprüfung** **16.06.10**

Lösung 1

Gauss-Algorithmus, Endschema:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 3 \end{array}\right)$$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Lösung 2

a)

$$H'(b) = -\frac{b}{\sqrt{4-b^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \kappa_H(b) = \left|\frac{b \cdot H'(b)}{H(b)}\right| = \left|\frac{b^2}{4-b^2}\right|$$

und damit

$$\lim_{b \uparrow 2} \kappa_H(b) = \lim_{b \uparrow 2} \frac{b^2}{4-b^2} = \lim_{b \uparrow 2} \frac{1}{\frac{4}{b^2} - 1} = \infty$$

d.h. die Studentin hat *nicht* Recht.

b) i) $n_1(x)$ ist keine Norm, da $n_1(x) = 0$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $x_1 \neq 0$, d.h. (N1) ist verletzt!

ii) gemäss Definition ist

$$n_2(x) = 1 \cdot |x_1| + \frac{1}{4} \cdot |x_2| + \frac{1}{9} \cdot |x_3| + \frac{1}{16} \cdot |x_4| \tag{6}$$

- (N1): sei $x \in \mathbb{R}^4$, mit (6) folgt: $n_2(x) > 0$, falls $x \neq 0$ und $n_2(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- (N2): sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} n_2(\mu x) &= 1 \cdot |\mu x_1| + \frac{1}{4} \cdot |\mu x_2| + \frac{1}{9} \cdot |\mu x_3| + \frac{1}{16} \cdot |\mu x_4| \\ &= |\mu| \cdot \left(1 \cdot |x_1| + \frac{1}{4} \cdot |x_2| + \frac{1}{9} \cdot |x_3| + \frac{1}{16} \cdot |x_4|\right) \\ &= |\mu| \cdot n_2(x) \end{aligned}$$

- (N3): seien $x, y \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
n_2(x+y) &= 1 \cdot |x_1+y_1| + \frac{1}{4} \cdot |x_2+y_2| + \frac{1}{9} \cdot |x_3+y_3| + \frac{1}{16} \cdot |x_4+y_4| \\
&\leq 1 \cdot (|x_1|+|y_1|) + \frac{1}{4} \cdot (|x_2|+|y_2|) + \frac{1}{9} \cdot (|x_3|+|y_3|) + \frac{1}{16} \cdot (|x_4|+|y_4|) \\
&= \left(1 \cdot |x_1| + \frac{1}{4} \cdot |x_2| + \frac{1}{9} \cdot |x_3| + \frac{1}{16} \cdot |x_4|\right) + \\
&\qquad \left(1 \cdot |y_1| + \frac{1}{4} \cdot |y_2| + \frac{1}{9} \cdot |y_3| + \frac{1}{16} \cdot |y_4\right) \\
&= n_2(x) + n_2(y)
\end{aligned}$$

D.h. alle drei Eigenschaften einer Norm sind erfüllt.

Lösung 3

a) $\|A\|_1 = 2 + 10^{-4}$, Spaltenmaximum, $A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix}$ und damit
$\kappa(A) = \|A\|_1 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_1 = (2 + 10^{-4}) \cdot 3 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4 + 3.$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k$ für $k = 1, 2$

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\Delta\hat{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ für $k = 1, 2$:

$$\Delta\hat{x}_1 = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \|\delta\hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta\hat{x}_1\|_1}{\|x\|_1} = \varepsilon$$

und

$$\Delta\hat{x}_2 = \varepsilon \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \|\delta\hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta\hat{x}_2\|_1}{\|x\|_1} = \frac{3}{2} \cdot \varepsilon 10^4$$

- theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}\|_1 = \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}\|_1 = (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$
- für $\hat{b}_1$ ist diese Abschätzung zu pessimistisch!, da $\varepsilon \leq (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$, d.h. linke und rechte Seiten haben stark verschiedene Grössenordnungen.
- für $\hat{b}_2$ ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, da $\frac{3}{2} \cdot \varepsilon \cdot 10^4 \leq (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$, d.h. linke und rechte Seite der Ungleichung sind von derselben Grössenordnung.

Lösung 4

Die NS von (2) sind $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

a) Grafik. $F(x) = 2 - x^2$, $F'(x) = -2x \Longrightarrow |F'(s_1)| = 2 > 1$ und $F'(s_2) = 4 > 1$,
d.h. beide Fixpunkte sind abstossend.

bi) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{7}{4}$ und $x_2 = -\frac{17}{16}$ und damit

$$x_0^{(1)} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{1}{2} + \frac{5}{13} = \frac{23}{26},$$

d.h. Konvergenz gegen $s_1 = 1$, also

$$q_{\text{Steffensen}} = \left| \frac{\frac{23}{26} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right| = \frac{3}{13}.$$

bii) Newton:

$$x_{k+1} = x_x - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 2}{2x_k + 1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L(x_0) = \left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| = \frac{5}{8} < 1, \text{ die Konvergenzbedingung ist erfüllt.}$$

$x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{9}{8}$ und $x_2 = \frac{209}{208}$, d.h. auch hier konvergiert die Folge gegen $s_1 = 1$.

Vergleich der beiden Werte: $|x_0^{(1)} - s_1| = \frac{3}{26} > |x_2 - s_1| = \frac{1}{208}$, m.a.W. x_2 ist qualitativ besser.

Lösung 5

- Grafik
- Überprüfung der verlangten Voraussetzungen: $I = [m - \pi, m + \pi]$.
  - i) $F(x) = m - \varepsilon \cdot \sin(x)$ ist stetig auf I.
  - ii) Randpunkte: $\sin(m \pm \pi) = -\sin(m)$, d.h. $F(m \pm \pi) = m + \varepsilon \sin(m) \in I$,
    weiter gilt: $F_{\text{min}} = m - \varepsilon \leq F(x) \leq m + \varepsilon = F_{\text{max}} \Longrightarrow F(I) \subset I$.
  - iii) $F'(x) = -\varepsilon \cdot \cos(x) \Longrightarrow |F'(x)| \leq |\varepsilon| < 1$.

Lösung 6

a) zu erfüllende Bedingungen, zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcccr} \int_{-1}^{1} \xi^0 \, d\xi & = & 2 & = & w_0 + w_1 \\ \int_{-1}^{1} \xi^1 \, d\xi & = & 0 & = & -\frac{\sqrt{3}}{3} w_0 + \frac{\sqrt{3}}{3} w_1 \end{array}$$

Lösung: $w_0 = w_1 = 1$.

Quadraturformal (5) auf dem Referenzintervall:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) \, d\xi \approx Q = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) analytisch:

$$\int_{-1}^{1} p_3(\xi) \, d\xi = 2 \cdot a_0 + \frac{2}{3} \cdot a_2$$

numerisch mit (5):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p_3(\xi)\,d\xi &\approx p_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p_3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= a_0 + a_1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + a_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a_3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 \\
& \quad a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 \\
&= 2 \cdot a_0 + \frac{2}{3} \cdot a_2 \qquad \text{exakt!}
\end{aligned}$$

Ingetragtionsfehler ist Null! Obige Quadratur ist exakt für alle Polynome vom Grad ≤ 3.

c) Transformation:

$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \qquad x = x(\xi) = m\xi + q \qquad m = \frac{\pi}{2} \qquad q = \frac{\pi}{2}$$

und damit

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{\pi}{2}\xi + \frac{\pi}{2}\right)\,d\xi \approx \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

speziell:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ \sin\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

da

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Der absolute Fehler ist $\Delta I = \left|\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2\right|$ und der relative Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{2}$.

alte Lösungen

Lösung 7 *alt*

a) $A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 1+10^{-8} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10^8 & -10^8 \\ -10^8 & 10^8 \end{pmatrix}$, also
$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k$ für $k = 1, 2$
b1) $\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ und b2) $\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$

c) $\Delta\hat{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ für $k = 1, 2$
b1) $\Delta\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon 10^8$
und b2) $\Delta\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon(1+10^8)$
theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}\|_\infty = \kappa(A)\left\|\delta\hat{b}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8\varepsilon$
für b1) *und* für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, d.h. das Problem ist *wirklich* schlecht konditioniert. Diese Schranke wäre nur dann nicht realistisch, falls in beiden Komponenten gleichzeitig und genau gleich gestört würde.

Lösung 8 *alt*

a) $s = 1$, also $s = F(s)$ und für Konvergenz: $|F'(s)| < 1$

$$\text{i) } F'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}},\ F'(1) = \frac{3}{2} > 1 \qquad \text{ii) } F'(1) = \frac{3}{4} < 1 \qquad \text{iii) } F'(1) = 2 > 1$$

d.h. nur die Variante ii) ist konvergent.

b) Bisektion: in jedem Schritt wird der Fehler halbiert: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^4}{5}\right)$
Varainte ii): in jedem Schritt wird der Fehler um $q = \frac{3}{4}$ verkleinert: $n > \frac{\log\left(\frac{5\cdot 10^{-4}}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$
Variante ii) ist also langsamer als die Bisektion.

Lösung 9 *alt*

a) Die Lösungen von (**??**) sind $s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.

b) Fixpunktiteration: $x = F(x)$

$$x = F_1(x) = \sqrt{4-3x} \qquad \text{oder} \qquad x = F_2(x) = \frac{1}{3}(4-x^2)$$

$$|F_1'(s_1)| = \frac{3}{2} > 1 \qquad |F_2'(s_1)| = \frac{2}{3} < 1$$

d.h. $s_1 = 1$ ist für F_2 ein attraktiver Fixpunkt.
$x_0 = 2$, $x_1 = F_2(x_0) = 0$, $x_2 = F_2(x_1) = \frac{4}{3}$ und $x_3 = F_2(x_2) = \frac{20}{27}$
$q \approx \frac{8}{9} < 1$! Tatsächlich ist $q = \frac{2}{3} = |F_2'(s_1)|$

c)

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{(x_2 - 2x_1 + x_0)} = \frac{4}{5} \qquad x_1' = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_3 - 2x_2 + x_1)} = \frac{12}{13}$$

und damit

$$q_{Aitken} \approx \frac{5}{13}$$

Lösung 10 *alt*

a) $n = 2$, d.h. $\xi_k = -1 + 2 \cdot \frac{k+1}{4}$, $k = 0, 1, 2$ und damit $\xi_0 = -\frac{1}{2}$, $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \frac{1}{2}$
zu lösendes Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 2 \\ -w_0 & & & + & w_2 & = & 0 \\ w_0 & & & + & w_2 & = & \frac{8}{3} \end{array} \right. \tag{7}$$

Lösung von (7): $w_0 = w_2 = \frac{4}{3}$ und $w_1 = -\frac{2}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus.

b) $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2} \cdot \xi$, $-1 \leq \xi \leq 1$.

$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) d\xi \approx Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cdot \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) - 2\right|$ und
relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{2}$.