Klasse ME08a **MND2 Schlussprüfung** 15. Juni 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Dgl zweiter Ordnung
Prinzip der LK, vorwärts und rückwärts
stetige Lösungen, Anschluss–Bedingungen
Systeme von Dgl; reelle, komplexe EW
EWP vorwärts und rückwärts
Stabilität, Kondition
Trapezmethode für ein System
Numerik: Euler, Trapezmethode, Methode von Taylor, Taylorreihe, ... was fehlt: Potenzreihen, komplexe EW das kommt in der zweiten Prfung! Ende FrSe 2010

Aufgabe 1 *neu; Entkopplung*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) = x + 2y(x) \qquad y(0) = \alpha \qquad y'(0) = \beta. \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) durch Entkopplung.

c) Wie müssen die AB gewählt werden, damit die Lösung für $x \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 2 *neu, Exponential-Matrix, System mit komplexen EW*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Lösen Sie (2) durch Entkopplung.

b) Wie lange müssen Sie warten, bis die Norm der Lösung kleiner als $\varepsilon = 10^{-5}$ ist?

Aufgabe 3 *neu, graphische Darstellung*

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem mit der Systemmatrix

$$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und } x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ist A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Das Differentialgleichungs–System in (3) soll nun numerisch mit der Methode "Euler implizit" gelöst werden, Schrittweite $h = 0.2$. Ist für diese Schrittweite das Verfahren stabil?

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt $x_k \longrightarrow x_{k+1}$ und führen Sie den ersten Schritt von x_0 nach x_1 aus.

b) Gegeben ist das folgende Schema eines Runge-Kutta Verfahrens mit der Fehlerordnung $p = 3$.

$$(4) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

Wählen Sie in $a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die restlichen Grössen in (4).
Stellen Sie auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ graphisch dar, wie das Verfahren (4) rechnet.
Einheiten: Intervall $[x_k, x_{k+1}] \equiv 24$ Häuschen.

c) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens aus b).

Aufgabe 4 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(5) \qquad y''' + 5 \cdot y'' + 8 \cdot y' + 6y = 10 \cdot e^{-x}$$

a) Schreiben Sie (5) als system von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösung des homogenen Systems in a) durch Entkopplung.

Aufgabe 5 *neu*

Gegeben ist die Differntialgleichung

$$(6) \qquad y' = \sqrt{y} \quad \text{mit der AB} \quad y(0) = 0.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (6).

b) Lösen Sie (6) numerisch mit der Methode "Euler explizit". Wählen Sie dabei $h = 0.1$ und führen Sie soviele Schritte durch, bis Sie bei $x = 1$ angelangt sind.

c) Können Sie sich das Verhalten von "Euler explizit" in b) erklären?

Aufgabe 6 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(7) \qquad y'' + 400 \cdot y = g(x) \qquad \text{mit den AB} \qquad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

a) Schreiben Sie (7) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix, sowie die Steifigkeit des Systems.

b) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird.

c) Das System in a) soll mit der Methode von Heun der Fehlerordnung $p = 2$ numerisch $3-$ stellig korrekt gelöst werden. Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden?

Aufgabe 7 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{y} = t \cdot y \qquad \text{mit der AB} \quad y(0) = 1. \tag{8}$$

a) Lösen Sie (8) mit Hilfe einer Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzrafdius ρ der Potenzreihe in a).

Aufgabe 8 *neu*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1.2x - x^2 - \frac{xy}{x+0.2} \\ \dot{y} &= \frac{1.5xy}{x+0.2} - y \end{cases} \qquad \text{mit den AB} \qquad \begin{cases} x(0) &= 0.8 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{9}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix $J(x, y)$ von (9) und speziell $J(x(0), y(0))$

b) Wie gross darf h am Anfang höchstens sein, damit (9) mit dem verbesserten Polygonzug numerisch stabil gelöst wird?

Aufgabe 9 *neu, Methode der Taylorreihe*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y + t + 1 \qquad \text{mit der AB} \quad y(0) = 1. \tag{10}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (10).

b) Lösen Sie (10) numerisch mit der Methode der Taylorreihe.
Können Sie ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k angeben?

Aufgabe 10 *neu, Stabliltät, Steifigkeit, Steuerung*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 201\dot{y} + c \cdot y = 80 \cdot \cos(t) + 156.25 \tag{11}$$

a) Schreiben Sie (11) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie c so, dass $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert der System–Matrix in a) ist.

c) Bestimmen Sie die Steifigkeit des Systems in a).

d) Das System in a) soll mit einem RK, $p = 3$ mit vier-stelliger Genauigkeit gelöst werden.
Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden.

Aufgabe 11 *neu, Steuerung*

a)

b)

Aufgabe 12 *neu, Jacobi-Matrix*

a)

b)

Aufgabe 13 *neu, implizites Verfahren, Trapezmethode*

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

a) Lösen Sie das System in (12) durch Entkopplung.

b) (12) soll nun mit Hilfe der Trapezmethode numerisch gelöst werden. Geben Sie die Rekursion für (12) an und führen Sie für $h = \frac{1}{2}$ den ersten Schritt aus.

c) Vergleichen Sie das Resultat aus b) mit der exakten Lösung, wie gross ist der absolute Fehler?

Aufgabe 14 *alt*

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 1 - x^2 \qquad \text{AB:} \quad x(0) = x_0 > 0. \tag{13}$$

a) Was sind hier die Isoklinen?

a) Bestimmen Sie die Lösung von (13).

b) Wie verhält sich die Lösung für grosse Werte von t?

Aufgabe 15 *alt*

Lösung klassisch
Auf einen Oszillator wirkt zuerst eine anregende Kraft und anschliessend eine dämpfende Kraft.
Die Differentialgleichung der Bewegung lautet:

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} t & 0 \le t \le \pi \\ \pi \cdot e^{\pi - t} & \pi < t \end{cases} \tag{14}$$

Bestimmen Sie diejenige Lösung, die $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$ erfüllt.
Die Lösung $x = x(t)$ soll samt ihrer ersten Ableitung für $0 \le t < \infty$ stetig sein.

Bitte wenden.

Aufgabe 16 *alt*

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + k^2 \cdot y(x) = 0 \qquad k \neq 0. \tag{15}$$

Student XY behauptet, dass $y_1(x) = \cos(kx)$ und $y_2(x) = \sin(kx)$ eine Fundamentalbasis der Lösungen von (15) bilden.

Studentin YY hingegen behauptet, dass $y_1(x) = e^{jkx}$ und $y_2(x) = e^{-jkx}$ eine Fundamentalbasis der Lösungen von (15) bilden.

Wer hat Recht? (*mit* Begründung)

b) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \cdot \dot{x}(t) + x(t) = \cos(2t). \tag{16}$$

- Wie gross muss δ sein, damit die Resonanzfrequenz $\omega_r = \frac{\omega_0}{4}$ ist?
- Wie gross wird dabei die zugehörige Amplitude?

Aufgabe 17 *alt*

Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_H(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Systemmatrix A.

b) Wie müssen die AB gewählt werden, damit die Lösung $x(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 18 *alt*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit den AB } x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

a) Formulieren Sie für (17) die Methode von Euler.

b) Formulieren Sie für (17) Trapezmethode.

Führen Sie mit a) und b) je den ersten Schritt aus, Schrittweite $h = 0.2$.

ME08a MND2 Lösungen Schlussprüfung 15.06.10

Lösung 1 *alt*

a) Isoklinen: $\dot{x} = k = 1 - x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{1-k}$, $k \leq 1$.
Geraden parallel zur $t-$ Achse.

b) Separierbare Dgl.: $\frac{dx}{(1-x^2)} = dt$
PBZ: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \Longrightarrow x_a(t) = \frac{c \cdot e^{2t}-1}{1+c \cdot e^{2t}}$, $c \in \mathbb{R}$.
AB: $c = \frac{1+x_0}{1-x_0}, x_0 \neq 1 \Longrightarrow x(t) = \frac{(1+x_0)-(1-x_0)e^{-2t}}{(1+x_0)+(1-x_0)e^{-2t}}$, $0 \leq t$

c)
$$x(t) = \frac{(1+x_0)-(1-x_0)e^{-2t}}{(1+x_0)+(1-x_0)e^{-2t}} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad t \longrightarrow \infty$$
$x_0 = 1$: $x(t) \equiv 1$ für $0 \leq t$, ist ein stabiles Gleichgewicht.

Lösung 2 *alt*

a) 1.Teil: $\ddot{x} + x = t$, $0 \leq t \leq \pi$ mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$
$x_A(t) = x_H(t) + x_P(t)$,
$x_H(t) = a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \sin(t)$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.
$x_P(t) = c_0 + c_1 t$, einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $x_P(t) = t$, also
$x_A(t) = a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \cdot \sin(t) + t$, $0 \leq t \leq \pi$
AB: $a_1 = b_1 = 0$ und damit $x(t) = t$, $0 \leq t \leq \pi$.

b) 2.Teil: $\ddot{x} + x = \pi \cdot e^{\pi - t}$, $\pi \leq t$ mit $x(\pi) = \pi$ und $\dot{x}(\pi) = 1$
$x_H(t) = a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \cdot \sin(t)$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.
$x_P(t) = c \cdot e^{-t} t$, einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $x_P(t) = \frac{\pi}{2} e^{\pi} \cdot e^{-t}$, also
$x_A(t) = a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \sin(t) + \frac{\pi}{2} e^{\pi} \cdot e^{-t}$, $\pi \leq t$
AB: $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $b_1 = -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ und damit
$$x(t) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos(t) - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \cdot \sin(t) + \frac{\pi}{2} e^{\pi} \cdot e^{-t} \qquad \pi \leq t.$$

Lösung 3 *alt*

a) EWP von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen EV
$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Somit $x_H(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) in Σ_{neu}:

$\dot{x}_{\text{neu}_1} = -x_{\text{neu}_1} \Longrightarrow x_{\text{neu}_1}(t) = c_1 e^{-t}$

$\dot{x}_{\text{neu}_2} = -x_{\text{neu}_2} \Longrightarrow x_{\text{neu}_2}(t) = c_2 e^{2t}$

Elimination von t: $x_2 = c_1^2 c_2 \frac{1}{x_1^2}$, Hyperbeln $2-$ten Grades.

Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt.

$x_{\text{neu}_1}(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$

$x_{\text{neu}_2}(t) \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$

Graphik

c) $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} =$ stabiler Unterraum

$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$ instabiler Unterraum

Lösung 4 *alt*

a) Wronski–Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \cdot \sin(kx) & k \cdot \cos(kx) \end{vmatrix} = k \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} e^{jkx} & e^{-jk} \\ jk \cdot e^{jkx} & -jk \cdot e^{jkx} \end{vmatrix} = -2jk \neq 0$$

Es haben beide Recht.

b) $\lambda^2 + 2\delta\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1.2} = -\delta \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{1-\delta^2}$

Frequenzgang der Amplitude ($\omega_0 = 1, \omega_E =$ Erregerfrequenz):

$$\begin{aligned} A(\omega_E) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}} \\ A(\omega_E) & \quad \text{maximal, falls der Nenner minimal,} \\ & \quad \text{d.h. der Ausdruck unter Wurzel minimal} \\ & \quad 8\delta^2 - 4(\omega_0^2 - \omega_E^2) \stackrel{!}{=} 0 \\ & \quad \omega_E := \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{1-2\delta^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und damit $\delta = \frac{\sqrt{30}}{8}$, schliesslich $A_{\text{max}} = A(\omega_r) = \frac{16}{\sqrt{255}}$.

Lösung 5 *alt*

a) $A_{\text{neu}} = D = T^{-1}AT \Longrightarrow A = TDT^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

wobei $D =$diag$(-2, 1)$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, d.h. $T \cdot c = x(0)$, $c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $c_2 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Damit $x(t)$ beschränkt bleibt, muss $c_2 = 0$ sein, d.h. $\alpha = \beta$.

Lösung 6 *alt*

$f(t,x) = A \cdot x$

a) Euler: $x_{k+1} = x_k + h \cdot Ax_k = (I_2 + hA) \cdot x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_1 = (I_2 + 0.2A) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 1.0 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

b) Taylormethode: $x_{k+1} - x_k = \frac{h}{2} \cdot (Ax_k + Ax_{k+1})$ und damit $\left(I_2 - \frac{h}{2}A\right) x_{k+1} = \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_k$

$\Longrightarrow x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.5 & 1.3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 1.3 & -0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 1.38 & -0.2 \\ 1.0 & 0.58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 0.98 \\ 2.16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$