Klasse ME08a **MND2 Schlussprüfung** 15. Juni 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differntialgleichung

$$(1) \qquad y' = \sqrt{y} \quad \text{mit der AB} \quad y(0) = 0.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Lösen Sie (1) numerisch mit der Methode "Euler explizit". Wählen Sie dabei $h = 0.1$ und führen Sie soviele Schritte durch, bis Sie bei $x = 1$ angelangt sind.

c) Können Sie sich das Verhalten von "Euler explizit" in b) erklären?

d) Führen Sie den ersten Schritt mit der Methode "Euler implizit" durch. Unterschied zu b)?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2) \qquad y'' - 400 \cdot y = g(x) \qquad \text{mit den AB} \qquad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix, sowie die Steifigkeit des Systems.

b) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird.

c) Das System in a) soll mit der Methode von Heun der Fehlerordnung $p = 2$ numerisch $3-$ stellig korrekt gelöst werden. Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden?

Aufgabe 3

a) Gegeben ist das folgende Schema eines Runge-Kutta Verfahrens mit der Fehlerordnung $p = 3$.

$$(3) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

Wählen Sie in (3) $a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die restlichen Grössen in (3).

Stellen Sie auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ graphisch dar, wie das Verfahren (3) rechnet.

Einheiten: Intervall $[x_k, x_{k+1}] \hat{=} 24$ Häuschen.

b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens aus a).

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem

$$(4) \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \qquad \text{mit der AB} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das System in (4) durch Entkopplung.

b) (4) soll nun mit Hilfe der Trapezmethode numerisch gelöst werden. Geben Sie die Rekursion für (4) an und führen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ den ersten Schritt aus.

c) Vergleichen Sie das Resultat aus b) mit der exakten Lösung aus a). Wie gross ist der absolute Fehler?

Aufgabe 5

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$(5) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= 1.2x - x^2 - \frac{xy}{x+0.2} \\ \dot{y} &= \frac{1.5xy}{x+0.2} - y \end{cases} \qquad \text{mit den AB} \qquad \begin{cases} x(0) &= 0.8 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix $J(x, y)$ von (5) und speziell $J(x(0), y(0))$.

b) Wie gross darf h am Anfang höchstens sein, damit (5) mit dem verbesserten Polygonzug numerisch stabil gelöst wird?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \dot{y} = -y + t + 1 \qquad \text{mit der AB} \quad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (6).

b) Lösen Sie (6) numerisch mit der Methode der Taylorreihe.
Können Sie ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k angeben?

Viel Erfolg!

ME08a MND2 Lösungen Schlussprüfung 15.06.10

Lösung 1

a) (1) ist separierbar: $y_h(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{C}{2}\right)^2$, AB $\Longrightarrow C = 0$, also $y(x) = \frac{x^2}{4}$

b) Euler explizit: $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$; hier ist $f(x, y) = \sqrt{y}$ und $y(0) = y_0 = 0$.
Also $y_1 = y_0 + h\sqrt{y_0} = 0$ und $y_{k+1} = y_k + h \cdot 0 = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Mit der AB $y_0 = 0$ werden alle $y_k = 0$, da f unabhängig von x ist.

d) $y_1 = y_0 + h\sqrt{y_1} \Longrightarrow y_1 = h^2$, falls $y_1 \neq 0$.
Im Unterschied zu b) wird hier nicht nicht–triviale Lösung erhalten.

Lösung 2

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = y' \Longrightarrow z' = Az + b(x)$, wobei
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 400 & 0 \end{pmatrix} = J =$ konstant!! (da die gegebene Dgl linear ist) und $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$.
EW von A: $\lambda_{1.2} = \pm 20$ und damit $S(t) = 1 =$ konstant, s.o.

b) Euler explizit: nur die negativen EW sind kritisch: $-2 < h\lambda < 0 \Longrightarrow 0 < h < \frac{1}{10}$.

c) Heun: auch hier sind nur die negativen EW kritisch: $R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!}$,
d.h. $\frac{|(h\lambda)|^3}{3!} < 5 \cdot 10^{-4}$ und somit: $h_1 < \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \cdot 10^{-2}$.
Dieses h_1 muss solange verwendet werden, bis $e^{-20x} < 5 \cdot 10^{-4} \Longrightarrow x_1 > -\frac{1}{20} \cdot \ln(5 \cdot 10^{-4})$.

Lösung 3

a)

$$\text{RK, } p = 3 \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

Graphik

b)

$$\begin{array}{rclcl} k_1 & = & f(x_k, y_k) & = & \lambda y_k \\ k_2 & = & f(x_k + h, y_k + hk_1) & = & (\lambda + h\lambda^2) y_k \\ k_3 & = & f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{h}{4}k_1 + \frac{h}{4}k_2) & = & (\lambda + \frac{h}{2}\lambda^2 + \frac{h^2}{4}\lambda^3) y_k \\ \hline y_{k+1} & = & y_k + \frac{h}{6} \cdot \{k_1 + k_2 + 4k_3\} & = & (1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!}) y_k \end{array}$$

und damit

$$R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} \qquad \text{Stabilitätsfunktion von } (3)$$

Lösung 4

a) EWP von A: EW $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen EV $v_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

also $x_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bestimmung der c_k: mit der AB erhalten wir $c_1 = 0$ und $c_2 = 2$ und damit $x(t) = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

b) Trapezmethode für die Schrittweite $h > 0$:

$$x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$h = \frac{1}{2}$: $x_1 = \left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) x_0$

$$\left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$x_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot x_0 = \frac{6}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta x = \left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - \frac{6}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit haben wir einen absoluten Fehler von $\|\Delta x\|_2 = \left|\left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - \frac{6}{5}\right)\right| \cdot \sqrt{5}$.

Lösung 5

a)

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1.2 - 2x - \frac{0.2 \cdot y}{(x+0.2)^2} & -\frac{x}{(x+0.2)} \\ \frac{0.3 \cdot y}{(x+0.2)^2} & \frac{1.5 \cdot x}{(x+0.2)} - 1 \end{pmatrix} \qquad J\left(x(0), y(0)\right) = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

b) EW von $J\left(x(0), y(0)\right)$: char. Polynom: $\lambda^2 + 0.4\lambda + 0.12 \stackrel{!}{=} 0$ und damit $\lambda_{1.2} = -0.2 \pm j \cdot \frac{\sqrt{2}}{5}$. Die EW sind konjugiert komplex, für die Stabilität ist der negative Realteil von $\lambda_{1.2}$ relevant, denn

$e^{\lambda_{1.2} t} = e^{-\frac{1}{5} t} \left\{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{5} t\right) \pm j \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{5} t\right)\right\}$ muss numerisch nachgebildet werden können.

Also $-2 < h \cdot \mathrm{Re}(\lambda_{1.2}) < 0 \Longrightarrow 0 < h < 10$

Lösung 6

(6) ist inhomogen und separierbar, also $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

a) $y_h(t) = C \cdot e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$. $y_p(t)$ mit Variation der Konstanten oder einem Ansatz aus einer Formelsammlung: $y_p(t) := a_0 + a_1 t$, da die Anregung linear in t ist.

Einsetzen in (6) und Koeffizientenvergleich liefert $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ und damit $y_a(t) = C \cdot e^{-t} + t$.

AB: $C = 1$ und schliesslich: $y(t) = e^{-t} + t$, $t \geq 0$.

b) Methode der Taylorreihe im allg. Näherungspunkt (t_k, y_k) = Entwicklungszentrum:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_k + c_1(t-t_k) + c_2(t-t_k)^2 + c_3(t-t_k)^3 + \dots \\ \dot{y}(t) &= c_1 + 2c_2(t-t_k) + 3c - 3(t-t_k)^2 + \dots \end{aligned}$$

$t = t_k + h$, also $h = (t - t_k)$ = Schrittweite:

$$y(t_k + h) = y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots \tag{7}$$

$$\dot{y}(t_k + h) = c_1 + 2c_2 h + 3c - 3h^2 + \dots \tag{8}$$

einsetzen in (6) und Koeffizientenvergleich:

$$c_1 + 2c_2(t-t_k) + 3c - 3(t-t_k)^2 + \dots = -(y_k + c_1(t-t_k) + c_2(t-t_k)^2 + c_3(t-t_k)^3 + \dots) + (t_k + h) + 1$$

$$\begin{array}{llcccl} h^0: & c_1 & = & -y_k + t_k + 1 \quad \text{Euler explizit} & & \\ h^1: & 2c_2 & = & -c_1 + 1 & \Longrightarrow & c_2 = \frac{1}{2!}y_k - \frac{1}{2!}t_k \\ h^2: & 3c_3 & = & -c_2 & \Longrightarrow & c_3 = -\frac{1}{3!}y_k + \frac{1}{3!}t_k \\ h^3: & 4c_4 & = & -c_3 & \Longrightarrow & c_4 = \frac{1}{4!}y_k - \frac{1}{4!}t_k \\ h^4: & 5c_5 & = & -c_4 & \Longrightarrow & c_5 = -\frac{1}{5!}y_k + \frac{1}{5!}t_k \\ h^5: & 6c_6 & = & -c_5 & \Longrightarrow & c_6 = \frac{1}{6!}y_k - \frac{1}{6!}t_k \\ .. & .. & = & ... & & \end{array}$$

und damit

$$y_{k+1} = \left(1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} - + \dots\right) \cdot y_k + \left(h - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^4}{4!} + - \dots\right) t_k + h \tag{9}$$

$$= e^{-h} \cdot y_k + (-e^{-h} + 1) \cdot t_k + h \tag{10}$$