Klasse ME08a **MND2 erster Test** 30. März 2010

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 1 \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta. \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Diffenerentialgleichungssystems aus a).

c) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Lösung für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 2

Student "Drei"stein schlägt das folgende Verfahren mit

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{2}$$

vor. Er behauptet, dass (2) von der Ordnung $p = 2$ sei.

a) Ist das Verfahren so gut wie Euler explizit? Ist seine Behauptung richtig? Würden Sie (2) verwenden?

b) Wenn nein, wie müsste (2) modifiziert werden?

Beantworten Sie obige Fragen mit dem Testbeispiel $y'(x) = \lambda \cdot y(x)$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$ mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ist A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

(3) soll nun numerisch mit der Trapezmethode gelöst werden, Schrittweite $h = 0.2$.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt $x_k \longrightarrow x_{k+1}$ und führen Sie den ersten Schritt von x_0 nach x_1 aus.

b) Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = 2e^{-t}\left\{\left[a_1 \cos(\sqrt{2}t) - b_1 \sin(\sqrt{2}t)\right] u^{(1)} - \left[a_1 \sin(\sqrt{2}t) + b_1 \cos(\sqrt{2}t)\right] w^{(1)}\right\},$$

wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ gegeben.

Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A an. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. Bestimmen Sie A.

ME08a MND2 Lösungen erster Test 30.03.10

Lösung 1

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $g_{\text{neu}}(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $z_{\text{neu}_p}(t) = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit $z_p(t) = T z_{\text{neu}_p}(t) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$z_a(t) = z_h(t) + z_p(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = \frac{1}{6}\left(2\alpha + \beta + \frac{1}{4}\right)$ und $c_2 = \frac{1}{6}\left(4\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)$:
$c_1 = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha + \beta + \frac{1}{4} = 0$.

Lösung 2

a) Mit dem vorgeschlagenen Verfahren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad k_1 &= \lambda y_k \\
(5) \qquad k_2 &= \lambda(y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1) = \lambda y_k + \frac{h}{3}\lambda^2 y_k \\
(6) \qquad y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4} \cdot \{2k_1 + k_2\} = \left(1 + \frac{3h}{4}\lambda + \frac{h^2}{12}\lambda^2\right) y_k
\end{aligned}$$

Euler: $y_{k+1} = (1 + h\lambda) y_k$.
Mit (6) folgt, dass (2) schlechter ist als die Methode von Euler!
(2) sollte nicht verwendet werden!

b) Aus der Theorie:

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= h\, f\, \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F\, \left\{\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3\right\} \\
&\quad + h^3 \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2 c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2 c_3]\right\} + O(h^4)
\end{aligned}$$

Zweistufiges Verfahren: $a_3 = c_3 = 0$:
Also sollten die beiden folgenden Gleichungen

$$1 = c_2 + c_2 \qquad \frac{1}{2} = a_2 c_2$$

gelten und damit $c_2 = \frac{3}{2}$ und $c_1 = -\frac{1}{2}$. Auf diese Weise hätte (2) die Fehlerordnung $p = 2$.

Lösung 3

a) $A = A^T$, d.h. A ist diagonalisierbar.

$$x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) x_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.88 & 0.4 \\ 0.4 & 0.88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 2.16 \\ 1.68 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$, Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -2$, det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

oder $\hat{T} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & w^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\hat{D} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ und schliesslich $A = \hat{T} \cdot \hat{D} \cdot \hat{T}^{-1}$

Da $v^1 = u^{(1)} + j \cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ *muss* die erste Zeile von

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$ "Null Eins" sein!

Lösung 4

a) $y' = k \Longrightarrow y(x) = -x(2k+1) - k$

Die Isoklinen sind Geraden mit der Steigung $m = -(2k+1)$ und dem $y-$ Achsenabschnitt $q = -k$.

b) $y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y_H(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$. Mit der AB folgt: $C = 5$, also $y(x) = \sqrt{5 - x^2}$

Dgl. der orthogonalen Trajektorien: $y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow y_H(x) = Cx$, mit der AB folgt $C = 1$ und damit für die orthogonale Trajektorie: $y = x$.

Grafik

Lösung 5

a) Ableiten und einsetzen.

$$y'(x) = \frac{C \cdot 75 \cdot e^{-15x}}{(1 + C \cdot e^{-15x})^2}$$

b) $y_0 = \frac{5}{2}$

Lösung 6

- erster Schritt: Separation der Variablen

  $y_H(x) = C \cdot \cos(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

- zweiter Schritt: Variation der Konstanten

  $y_P(x) = C(x) \cdot \cos(x)$, einsetzen $\Longrightarrow C(x) = \tan(x)$

- dritter Schritt: allgemeine Lösung

  $y_A(x) = y_H(x) + y_P(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

  Bestimmung von C mit der AB: $C = -1$, also $y(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.