Klasse ME08a **MND2 zweiter Test** 11. Mai 2010

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1) \qquad (1+t)\,x - \gamma\,\dot{x} = 0 \qquad \gamma \neq 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1.$$

a) Lösen Sie (1) mit Hilfe einer Potenzreihe (Koeffizientenvergleich bis und mit t^3).

b) Die Lösung von (1) soll mit der Methode "Euler implizit" numerisch approximiert werden. Führen Sie dazu den ersten Schritt von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \ddot{y} + 26\dot{y} + 25y = 0 \qquad \text{mit den AB} \quad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta.$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Steifheit $S(t)$ des Systems in a).

c) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird? Wie ist die Schrittweite für den verbesserten Polygonzug zu wählen?

Aufgabe 3

a) Wie lauten die Bedingungen für die vier Parameter a_2, b_{21}, c_1 und c_2 des

$2-$ stufigen Runge–Kutta Verfahrens

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + a_2 h, y_k + b_{21} h k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h\,\{c_1 k_1 + c_2 k_2\} \end{aligned}$$

damit es maximale Fehlerordnung hat? (*mit* Begründung)

b) Erklären sie, dass die Fehlerordnung p höchstens 2 ist.

c) Als Spezialfälle sind sowohl die Methode von Heun mit $p = 2$, als auch die verbesserte Polygonzugmethode abzuleiten.

ME08a MND2 Lösungen zweiter Test 11.05.10

Lösung 1

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \qquad x(0) = 1 = a_0$$

a) Koeffizientenvergleich nach Potenzen in t:

(3)
$$t^0: \quad a_0 = \gamma\, a_1 \qquad a_1 = \frac{1}{\gamma}$$
(4)
$$t^1: \quad a_0 + a_1 = 2\gamma\, a_2 \qquad a_2 = \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\gamma+1}{2\gamma^2}$$
(5)
$$t^2: \quad a_1 + a_2 = 3\gamma\, a_3 \qquad a_3 = \frac{1}{3\gamma}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right) = \frac{3\gamma+1}{6\gamma^3}$$
(6)
$$t^3: \quad a_2 + a_3 = 4\gamma\, a_4 \qquad a_4 = \frac{1}{4\gamma}\left(\frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{3\gamma}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right)\right) = \frac{3\gamma^2 + 6\gamma + 1}{24\gamma^4}$$
(7) $\ldots$

b)
$$x(h) - x(0) = \frac{1}{\gamma} h(1+h)x(h) \quad \Longrightarrow \quad x(h) = \frac{\gamma}{\gamma - h(1+h)} \cdot x(0)$$

Lösung 2

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -26 \end{pmatrix}$ und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) EW von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 26\lambda + 25 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -25$ und $\lambda_2 = -1$ und damit $S(t) = 25 =$ konstant!

c) Euler: $0 < h < \frac{2}{25}$, genau gleich für den verbesserten Polygonzug!

Lösung 3

Aus der Theorie:

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= h\, f\, \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F\, \left\{\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3\right\} \\ &\quad + h^3 \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2 c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2 c_3]\right\} + O(h^4) \end{aligned}$$

a) damit $y' = 1$ mit $y(0) = 0$ numerisch exakt gelöst wird: $a_2 = b_{21}$

Zweistufiges Verfahren: $a_3 = c_3 = 0$:

Also müssen die beiden folgenden Gleichungen

$$1 = c_2 + c_2 \qquad \frac{1}{2} = a_2 c_2$$

gelten.

b) Mit den Bedingungen aus a) kann der Koeffizient des Terms mit h^3 *nicht* zu Null gemacht werden! Somit ist $p = 2$.

c)

Heun, $p = 2$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

verbesserter Polygonzug, $p = 2$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Oder Beantwortung der Fragen in a) - c) mit Hilfe der Testbeispiele $y'(x) = \lambda y(x)$ mit der AB $y(0) = 1$ zusammen mit $y'(x) = 1$ und $y(0) = 0$.

Lösung 4

a) $A = A^T$, d.h. A ist diagonalisierbar.

$$x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) x_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.88 & 0.4 \\ 0.4 & 0.88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 2.16 \\ 1.68 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$, Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -2$, det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

oder $\hat{T} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & w^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\hat{D} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ und schliesslich $A = \hat{T} \cdot \hat{D} \cdot \hat{T}^{-1}$

Da $v^1 = u^{(1)} + j \cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ *muss* die erste Zeile von

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$ "Null Eins" sein!

Lösung 5

a) $y' = k \Longrightarrow y(x) = -x(2k+1) - k$

Die Isoklinen sind Geraden mit der Steigung $m = -(2k+1)$ und dem $y-$ Achsenabschnitt $q = -k$.

b) $y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y_H(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$. Mit der AB folgt: $C = 5$, also $y(x) = \sqrt{5 - x^2}$

Dgl. der orthogonalen Trajektorien: $y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow y_H(x) = Cx$, mit der AB folgt $C = 1$ und damit für die orthogonale Trajektorie: $y = x$.

Grafik

Lösung 6

a) Ableiten und einsetzen.

$$y'(x) = \frac{C \cdot 75 \cdot e^{-15x}}{(1 + C \cdot e^{-15x})^2}$$

b) $y_0 = \frac{5}{2}$

Lösung 7

- erster Schritt: Separation der Variablen

  $y_H(x) = C \cdot \cos(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

- zweiter Schritt: Variation der Konstanten

  $y_P(x) = C(x) \cdot \cos(x)$, einsetzen $\Longrightarrow C(x) = \tan(x)$

- dritter Schritt: allgemeine Lösung

  $y_A(x) = y_H(x) + y_P(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

  Bestimmung von C mit der AB: $C = -1$, also $y(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.