Klassen WI08ab **MLAN4 Schlussprüfung** 23. Juni 2010

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' = 4x + 3y \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems in a) durch Entkopplung.

c) Wie müssten die AB gewählt werden, damit die Lösung für $x \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -0.01 \cdot y_1 + 0.01 \cdot y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 - y_1 \cdot y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_1 \cdot y_2 - 100 \cdot y_3 \end{cases} \quad \text{mit den AB} \quad \begin{cases} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1 \\ y_3(0) &= 1 \end{cases} \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Steifigkeit $S(0)$.

b) (2) soll mit der Methode "verbesserter Polygonzug" numerisch $3-$ stellig korrekt gelöst werden (3 Dezimalen nach dem Komma). Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2\delta \end{pmatrix} \qquad \delta > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition von $A(\delta)$ bzgl. der $\|...\|_2-$ Norm in Abhängigkeit des Parameters δ.

b) Wohin strebt die Kondition $\kappa(A(\delta))$ für $\delta \longrightarrow \frac{1}{6}$?

Aufgabe 4

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) Lösen Sie (3) durch Entkopplung.

b) Wie lange müssen Sie warten, bis die $2-$ Norm der Lösung kleiner als $\varepsilon = 10^{-5}$ ist?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 201\dot{y} + c \cdot y = 80 \cdot \cos(t) + 156.25 \tag{4}$$

a) Schreiben Sie (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie c so, dass $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert der System–Matrix in a) ist.

c) Bestimmen Sie die Steifigkeit des Systems in a).

d) Das System in a) soll mit der Methode "Euler implizit" numerisch gelöst werden. Geben Sie dazu die allgemeine Rekursion an, (aufgelöst nach der zu berechnenden Grösse).

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2 - t) \cdot \dot{x} + \beta \cdot x = 0 \qquad x(3) = x_0 \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (5).

b) Falls Sie (5) mit Hilfe einer Potenzreihe lösen wollten, wie müssten Sie das Entwicklungszentrum t_0 wählen?

c) (5) soll nun numerisch mit der Trapezmethode gelöst werden. Geben Sie dazu für (5) die allgemeine Rekursion an, und führen Sie den ersten Schritt mit der Schrittweite $h > 0$ aus.

Viel Erfolg!

WI08ab MLAN4 Lösungen Schlussprüfung 23.06.10

Lösung 1

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = y'$ und damit: $z' = Az + g(x)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x \end{pmatrix}$

b) $z_a(x) = z_h(x) + z_p(x)$, dabei ist $z_h(x) = c_1 e^{\lambda_1} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2} \cdot v^{(2)}$ die allg. Lösung des homogenen Systems und $z_p(x)$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.

EWP von A: EW $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Damit haben wir $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$g_{\text{neu}}(x) = T^{-1} g(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

in Σ_{neu}: $z'_{\text{neu}_p}(x) = D z_{\text{neu}_p}(x) + g_{\text{neu}}(x)$.

Für jede Komponente muss eine lineare Funktion $a_0 + a_1 x$ angesetzt werden, da die Anregung linear in x ist.

Koeffizientenvergleich liefert:

$$z_{\text{neu}_p}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}x \\ 1 - x \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow z_p(x) = T z_{\text{neu}_p}(x) = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$z_a(x) = c_1 e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Geht nicht, da die partikuläre Lösung linear in x ist, d.h. $\|z_p(x)\|_2 \longrightarrow \infty$, falls $x \longrightarrow \infty$.

Lösung 2

a)

$$J(y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 & 0 \\ 1 - y_3 & -1 & -y_1 \\ y_2 & y_1 & -100 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad J(y_0) = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -100 \end{pmatrix}$$

EW von $J(y_0)$: $\lambda_1 = -100$, $\lambda_2 = -0.01$ und $\lambda_3 = -1$ und damit $S(0) = 10^4$.

b) "verbesserter Polygonzug": auch hier sind nur die negativen EW kritisch: $R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!}$, d.h. $\frac{|(h\lambda)|^3}{3!} < 5 \cdot 10^{-4}$ und somit: $h_1 < \sqrt[3]{3} \cdot 10^{-3}$.

Dieses h_1 muss solange verwendet werden, bis $e^{-100t} < 5 \cdot 10^{-4} \Longrightarrow t_1 > -\frac{1}{100} \cdot \ln(5 \cdot 10^{-4})$.

Lösung 3

Da $A = A^T$ genügt es die EW von A zu bestimmen.

a) $p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\cdot\left\{(\lambda^2 - (4+2\delta)\cdot\lambda - 1 + 6\delta\right\} \stackrel{!}{=} 0$ und damit $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2.3} = (2+\delta)\pm\sqrt{(2+\delta)^2 + (1-6\delta)}$

$$\kappa(A(\delta)) = \frac{|\lambda_{\mathsf{max}}|}{|\lambda_{\mathsf{min}}|} = \frac{(2+\delta) + \sqrt{(2+\delta)^2 + (1-6\delta)}}{|(2+\delta) - \sqrt{(2+\delta)^2 + (1-6\delta)}|}$$

b) Für $\delta \longrightarrow \frac{1}{6}$ gilt: $\lambda_2 \longrightarrow 2\cdot(2+\delta)$ und $\lambda_3 \longrightarrow 0$, da $(1-6\delta) \longrightarrow 0$,
also $\kappa(A(\delta)) \longrightarrow \infty$ für $\delta \longrightarrow \frac{1}{6}$.
M.a.W.: $A\left(\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ist singulär, da die dritte Spalte ein Vielfaches der ersten Spalte ist,
$a^{(3)} = \frac{2}{3}\cdot a^{(1)}$.

Lösung 4

a) EWP von A: EW $\lambda_{1.2} = -2 \pm j\cdot 3$ mit den zugehörigen EV
$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - j\cdot 3 \end{pmatrix} = \mu_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + j\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right]$, $v^{(2)} = \left(v^{(1)}\right)^\star$.

$$x_h(t) = 2e^{-2t}\left\{[a_1\cos(3t) - b_1\sin(3t)]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - [a_1\sin(3t) + b_1\cos(3t)]\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.$$

$t = 0$: $2a_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2b_1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = b_1 = 1.$

Schliesslich

$$x(t) = 2e^{-2t}\left\{[\cos(3t) - \sin(3t)]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - [\sin(3t) + \cos(3t)]\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

b) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Tatsache, dass $[\ldots] \leq 2$

$$\|x(t)\|_2 \leq 2e^{-2t}\left\{2\sqrt{2} + 2\cdot 3\right\} < 10^{-5} \qquad \Longrightarrow \qquad t > \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{10^{-5}}{4(\sqrt{2}+3)}\right)$$

Lösung 5

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -201 \end{pmatrix}$
und $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 80\cdot\cos(t) + 156.25 \end{pmatrix}$

b) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 201\lambda + c \stackrel{!}{=} 0$,
Satz von Vieta: Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -201 \Longrightarrow \lambda_2 = -200$ und det$(A) = \lambda_1\cdot\lambda_2 = c$, also $c = 200$.

c) $S(t) = S = 200 =$ konstant, da die gegebene Dgl linear ist.

d) Euler implizit: $z_{k+1} = z_k + h\cdot f(t_{k+1}, z_{k+1})$, also

$$\begin{aligned} (6) \qquad z_{k+1} &= (I_2 - hA)^{-1}\cdot(z_k + h\cdot g(t_{k+1})) \\ (7) \qquad &= \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 200h & 1+201h \end{pmatrix}^{-1}\cdot\left(z_k + h\begin{pmatrix} 0 \\ 80\cdot\cos(t_{k+1}) + 156.25 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Lösung 6

a) (5) ist linear, homogen und separierbar: $x_h(t) = C \cdot (t-2)^\beta$, $C \in \mathbb{R}$, $t \geq 3$.
AB: $x(3) = x_0 \Longrightarrow C = x_0$ und damit $x(t) = x_0 \cdot (t-2)^\beta$, $t \geq 3$.

b) $t_0 = 3$.

c) Trapezmethode: $\dot{x} = \frac{\beta}{t-2} \cdot x$ und damit

$$x_{k+1} - x_k = \frac{h}{2} \cdot \left\{ \frac{\beta}{t_k - 2} \cdot x_k + \frac{\beta}{t_{k+1} - 2} \cdot x_{k+1} \right\} \tag{8}$$

$$\left(1 - \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{t_{k+1} - 2}\right) \cdot x_{k+1} = \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{t_k - 2}\right) \cdot x_k \tag{9}$$

$$x_{k+1} = \left(1 - \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{t_{k+1} - 2}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{t_k - 2}\right) \cdot x_k \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

erster Schritt: $t_0 = 3, x_0 = 3$ und $t_1 = 3 + h$

$$x_1 = \left(1 - \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{1+h}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\beta}{1}\right) \cdot x_0 = \left(\frac{2 \cdot (1+h)}{2 \cdot (1+h) - h\beta}\right) \cdot \left(\frac{2 + h\beta}{2}\right) \cdot 3$$