

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1

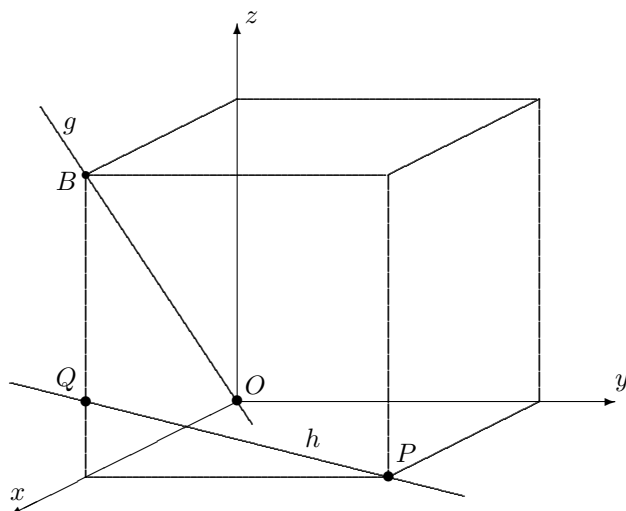
a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\varphi) & 0 & -1 \\ \sin(\varphi) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche Winkel φ im Bogenmass hat die Determinante den Wert $-\frac{1}{4}$? (alle Lösungen)

b) Gegeben ist die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Wann hat $Ux = 0$ nicht-triviale Lösungen?**Aufgabe 2**Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge $s = 1$.

Bestimmen Sie die orthogonale Transversale t der Geraden $g = g(O, B)$ und $h = h(Q, P)$. Dabei sind die Koordinaten von $Q(1, 0, \frac{1}{4})$. Bestimmen Sie zudem den Abstand der Geraden g und h .

Aufgabe 3

Was können Sie mit Hilfe der Determinante der Koeffizientenmatrix A über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} -ax_1 + x_2 & = b_1 \\ x_1 - ax_2 + x_3 & = b_2 \\ + x_2 - ax_3 & = b_3 \end{cases}$$

in Abhängigkeit des Parameters a aussagen?

Betrachten Sie dabei die Fälle

a) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

b) $b_1 = 0, b_2 = b_3 = 1$.

Geben Sie im Fall a) für $a = \sqrt{2}$ die Lösungen an.

Lösung 1

a) Entwicklung nach der dritten Spalte:

$$\det(A) = -\sin(\varphi) \cos(\varphi) = -\frac{1}{2} \sin(2\varphi), \text{ also } \sin(2\varphi) = \frac{1}{2} \text{ und damit}$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ oder } \varphi_k = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Entwicklung nach der zweiten Spalte: $u = 5$.

Lösung 2

$$g: \vec{r} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_1 \in \mathbb{R} \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Richtungsvektor von } t.$$

Ebene E aufgespannt von $\vec{c}$ und h , $E: 17x + 4y + 16z = 21$, $P_1 = g \cap E: P_1 \left(\frac{7}{11}, 0, \frac{7}{11} \right)$ und damit

$$t: \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} \\ 0 \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_3 \in \mathbb{R}.$$

$$P_2 = h \cap t, P_2 \left(1, -\frac{1}{11}, \frac{3}{11} \right). \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ also Abstand } d = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \right| = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{33} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Lösung 3

$$\det(A) = (-a)(a^2 - 2) = a \cdot (2 - a^2)$$

a) $\det(A) \neq 0$ nur die triviale Lösung, $\det(A) = 0$ ∞ -viele Lösungen.

b) $\det(A) \neq 0$ genau eine Lösung, $\det(A) = 0$ keine oder ∞ -viele Lösungen.

Für $a = \sqrt{2}$ ist die Determinante Null, wir haben unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter, nämlich:

$$x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 4

a) $s_a = (\sqrt{2} + 1) \cdot \cos(x)$

b) Mit $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ erhalten wir:

$$2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$$

Substitution: $u := \cos(x) \implies 2u^2 - 3u + 1 = 0 \implies u_1 = 1$ und $u_2 = \frac{1}{2}$

Lösungen:

- $\cos(x) = 1 \implies x_k = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\cos(x) = \frac{1}{2} \implies x_k = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lösung 5

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) 1. Schritt: $Lc = Pb \implies c = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Schritt: $Rx = c \implies x = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung 6

a) $\det(B) = 0$, Entwicklung nach der 1-ten Spalte, z.B.: $\det(B) = 12 + 34b = 0 \implies b = -\frac{6}{17}.$

b) $\kappa_H(a) = \frac{2a^2}{(4-a^2)} \implies \lim_{a \rightarrow 2, a > 2} \kappa_H(a) = \infty$, d.h. die Kondition wird beliebig gross, er hat *nicht* Recht.