Klasse WI09b **MLAN2 – Schlussprüfung** 18. Juni 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist das Problem

$$H(a) = \sqrt{100a^2 - 1}, \qquad \text{mit } a > \frac{1}{10}.$$

Für $a \longrightarrow \frac{1}{10}$ entsteht bei der numerischen Bestimmung von $H(a)$ offensichtlich Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von $H(a)$, d.h. $\lim\limits_{a \to \frac{1}{10}} \kappa_H(a)$.

b) Kann die Auslöschung in obigem Fall vermieden werden? (*mit* Begründung!)

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei harmonische Schwingungen:

$$f_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Grössen A und φ der Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi).$$

Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welchen kleinsten Wert $t > 0$ liegt der Zeiger zum ersten mal auf der *positiven* y-Achse?

Aufgabe 3

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen-Maximum-Strategie* die LR-Zerlegung von A, d.h. Matrizen L, R und P, mit $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung durch Erraten.

   Tipp: Skizzieren Sie die Kurven sowohl der linken als auch der rechten Seite der Gleichung in demselben Koordinatensystem.

b) Die Gleichung soll nun mit einer Fixpunkt-Iteration numerisch gelöst werden. Geben Sie für jede Lösung jeweils eine geeignete Iterationsgleichung so an, dass die Lösung zu einem attraktiven Fixpunkt wird.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung, und stellen Sie sie in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|z - 2j + 3| = 3.$$

b) Es sei $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - j\sqrt{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}$ gegeben. Gesucht ist die kartesische Form der Potenz z^{10}.

c) Bestimmen Sie alle, d.h. auch die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$1 - \tan(x) = \cos(2x).$$

b) Vereinfachen Sie die folgende Summe soweit als möglich:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 18.06.10

Lösung 1

a) Die Ableitung von $H(a)$ lautet

$$H'(a) = \frac{100a}{\sqrt{100a^2 - 1}}.$$

Damit erhält man als Kondition

$$\kappa_H(a) = \left| \frac{a \cdot H'(a)}{H(a)} \right| = \left| \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \right| = \frac{100a^2}{100a^2 - 1}, \quad \text{da } a > \frac{1}{10}.$$

Der gesuchte Grenzwert lautet also

$$\lim_{a \longrightarrow \frac{1}{10}} \kappa_H(a) = \infty, \text{ da der Zähler gegen Eins und der Nenner gleichzeitig gegen Null konvergiert.}$$

D.h. die Kondition des Problems $H(a)$ ist in diesem Fall sehr schlecht.

b) Die Kondition ist gemäss a) schlecht, und somit kann die Auslöschung *nicht* vermieden werden.

Lösung 2

a) Durch Umschreiben von $f_2(t)$ in eine Sinusschwingung erhält man

$$f_2(t) = \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Damit lässt sich das Zeigerdiagramm erstellen, und man erhält

$$A = \sqrt{17} \quad \text{und} \quad \tan(\varphi) = \frac{-5}{-3} \quad \text{und damit} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) + \pi \quad \text{3. Quadrant!.}$$

b) Der zurückzulegende Winkel α des Drehzeigers lautet

$$\alpha = 2t = \frac{3\pi}{2} - \varphi + \pi = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{5}{3}\right).$$

Damit erhält man die gesuchte Zeit

$$t = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{5}{3}\right).$$

Lösung 3

a) Als Endschema der LR-Zerlegung erhält man mit dem Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die einzelnen Matrizen lauten somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Im ersten Schritt $Lc = Pb$ erhält man

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt $Rx = c$ erhält man schliesslich die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

a) Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, dass es zwei Lösungen geben muss. Diese lauten $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$.

b) Eine erste Umformung der Gleichung lautet

$$x = \underbrace{2^{x-1}}_{F(x)},$$

und damit die entsprechende Iterationsgleichung

$$x_{k+1} = 2^{x_k - 1}.$$

Der zugehörige Konvergenzquotient lautet demnach

$$q = |F'(x)| = \ln(2)\, 2^{x-1}.$$

Für $s_1 = 1$ erhält man also $q = \ln(2) < 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_1 attraktiv.

Für $s_2 = 2$ erhält man jedoch $q = \ln(4) > 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_2 abstossend.

Eine zweite Umformung lautet

$$x = \underbrace{1 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}}_{G(x)},$$

mit der zugehörigen Iterationsgleichung

$$x_{k+1} = 1 + \frac{\ln(x_k)}{\ln(2)}.$$

Der entsprechende Konvergenzquotient lautet demnach

$$q = |G'(x)| = \frac{1}{x\,\ln(2)}.$$

Für $s_2 = 2$ erhält man diesmal $q = \frac{1}{\ln(4)} < 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_2 jetzt attraktiv.

Lösung 5

a) Mit $z = x + jy$ erhält man die Gleichung

$$|(x+3) + j(y-2)| = 3,$$

und durch Betragsbildung also

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Die Lösungsmenge entspricht also einer Kreislinie vom Radius $r = 3$, um den Mittelpunkt $M = -3 + 2j$ in der Gauss'schen Zahlenebene.

b) In Polardarstellung gilt

$$z = \sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}.$$

Daraus erhält man die Gleichung

$$z^{10} = 2^5\, e^{-j\frac{5\pi}{3}} = 32\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - j\,\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 16 + j\,16\sqrt{3}.$$

c) Die Nullstellen lauten

$$z_1 = 2, \quad z_{2,3} = \pm j.$$

Lösung 6

a) Durch Umformen erhält man die äquivalente Gleichung

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x)).$$

- 1. Fall: $\cos(x) - \sin(x) = 0$
  $\implies \quad \tan(x) = 1 \quad \implies \quad x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- 2. Fall: $\cos(x) - \sin(x) \neq 0$
  $\implies \quad \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \quad \implies \quad \sin(x) = 0 \quad \implies \quad x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Die Lösungsmenge lautet also insgesamt

$$L = \left\{x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Die beiden Sinusterme ergeben

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\alpha) = \sqrt{2}\sin(\alpha).$$

Die beiden Cosinusterme ergeben

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha).$$

Daraus wird in der Summe schliesslich

$$\sqrt{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)).$$