Klasse WI09b **MLAN2 - Test 2** 10. Mai 2010

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = 3\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$f_2(t) = 4\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Zu welcher Zeit $t > 0$ liegt der Zeiger der Überlagerung zum ersten auf Mal der Geraden $y = x$.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist das mathematische Problem

$$H(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1}.$$

Bestimmen Sie die Kondition von $H(x)$ im Grenzübergang $x \longrightarrow 0$.

b) Studentin XY behauptet, für das mathematische Problem

$$H(b) = \sqrt{4 - b^2}, \quad \text{mit} \quad |b| < 2$$

könne im Grenzfall $b \longrightarrow 2$ die Auslöschung vermieden werden. Hat sie Recht? (*mit* Begründung!)

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der ∞-Norm.

b) Betrachten Sie für $\varepsilon = 10^{-3}$ die beiden fehlerbehafteten rechten Seiten

$$\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden fehlerbehafteten Lösungen in b) jeweils den relativen Fehler bezüglich der ∞-Norm, und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung. Was stellen Sie fest?

MLAN2 Lösungen Test 2 10.05.10

Lösung 1

a) Durch Umschreiben von $f_2(t)$ auf eine Sinusschwingung erhält man

$$f(t) = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right),$$

womit sich das Zeigerdiagramm für $t = 0$ zeichnen lässt (der resultierende Zeiger liegt im zweiten Quadranten!). Die Überlagerung lautet

$$f(t) = 5 \cdot \sin\left(\omega t + \pi - \arctan(7)\right).$$

b) Aus der Gleichung

$$\varphi + \omega t = \pi + \frac{\pi}{4}$$

erhält man durch Einsetzen für φ und Auflösen nach t

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(7)\right).$$

Lösung 2

a) Die Ableitung von $H(x)$ lautet

$$H'(x) = \frac{\sin(x)}{(\cos(x) - 1)^2}.$$

Damit ergibt sich die Kondition

$$\kappa_H(x) = \left|\frac{x\,\sin(x)}{\cos(x) - 1}\right|.$$

Durch zweimaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de-l'Hospital erhält man so den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \kappa_H(x) = 2.$$

b) Die Ableitung von $H(b)$ lautet

$$H'(b) = \frac{-b}{\sqrt{4 - b^2}}.$$

Damit ergibt sich die Kondition

$$\kappa_H(b) = \frac{b^2}{4 - b^2}.$$

Daraus wiederum erhält man im Grenzübergang $b \to 2$

$$\lim_{b \to 2} \kappa_H(b) = +\infty.$$

Die Studentin XY hat also nicht Recht, und die Auslöschung kann nicht vermieden werden.

Lösung 3

$$A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^4 & -1 \\ -1 \cdot 10^4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\|A\|_\infty = 3$ und $\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 2 \cdot 10^4 = 20'001$, und damit $\kappa(A) = 60'003$.

b) b$_1$) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}.$

b$_2$) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot 10^4\ \varepsilon \\ 1 - 10^4\ \varepsilon \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10^4\ \varepsilon \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -9 \end{pmatrix}.$

c) Gerechnete Fehler:

$\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$.

$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = 2 \cdot 10^4\ \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$.

Theoretische Schranke:

$\|\delta\hat{x}_1\|_\infty \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_\infty$ ist zu pessimistisch; der tatsächliche Fehler ist viel kleiner.

$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_\infty$ ist realistisch; der tatsächliche Fehler liegt in dieser Grössenordnung.