

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:**Bewertung:** Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.**Aufgabe 1** *Schlusspr*

Gegeben ist das Problem

$$H(a) = \sqrt{100a^2 - 1}, \quad \text{mit } a > \frac{1}{10}.$$

Für $a \rightarrow \frac{1}{10}$ entsteht bei der numerischen Bestimmung von $H(a)$ offensichtlich Auslöschung.

- Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von $H(a)$, d.h. $\lim_{a \rightarrow \frac{1}{10}} \kappa_H(a)$.
- Kann die Auslöschung in obigem Fall vermieden werden? (*mit Begründung!*)

Aufgabe 2 *Schlusspr*

Die Ungleichung

$$2 \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$$

soll mit Hilfe von Drehzeigern gelöst werden, d.h. die linke Seite der Ungleichung soll zuerst als harmonische Schwingung $A \cdot \sin(t + \varphi)$ dargestellt werden.

- Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$ (Einheiten für beide Achsen: 4 Häuschen), und berechnen Sie die Amplitude A , sowie die Phase φ .
- Bestimmen Sie die Lösungen der Ungleichung mit den Resultaten aus a).

Aufgabe 3 *Assessment*

Gegeben sind zwei harmonische Schwingungen:

$$f_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad f_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Grössen A und φ der Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi).$$

Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

- Für welchen kleinsten Wert $t > 0$ liegt der Zeiger zum ersten mal auf der *positiven y*-Achse?

Aufgabe 4 *Schlusspr*

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen-Maximum-Strategie* die LR -Zerlegung von A , d.h. Matrizen L , R und P , mit $LR = PA$.
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 5 *Schlusspr*

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x.$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung durch Erraten.
Tipp: Skizzieren Sie die Kurven sowohl der linken als auch der rechten Seite der Gleichung in demselben Koordinatensystem.
- b) Die Gleichung soll nun mit einer Fixpunkt-Iteration numerisch gelöst werden. Geben Sie für jede Lösung jeweils eine geeignete Iterationsgleichung so an, dass die Lösung zu einem attraktiven Fixpunkt wird.

Aufgabe 6 *Schlusspr*

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung, und stellen Sie sie in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|z - 2j + 3| = 3.$$

- b) Es sei $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - j\sqrt{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}$ gegeben. Gesucht ist die kartesische Form der Potenz z^{10} .
- c) Bestimmen Sie alle, d.h. auch die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

Aufgabe 7 *Schlusspr*

- a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\frac{\sin(2x) \cdot (1 - \cos(2x))}{\cos(4x) - \cos^2(2x)}.$$

- b) Bestimmen Sie *alle* Lösungen der Gleichung

$$\frac{1 - \cos(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 8 *Assessment*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$1 - \tan(x) = \cos(2x).$$

b) Vereinfachen Sie die folgende Summe soweit als möglich:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Lösung 1 *Schlusspr*

- a) Die Ableitung von $H(a)$ lautet

$$H'(a) = \frac{100a}{\sqrt{100a^2 - 1}}.$$

Damit erhält man als Kondition

$$\kappa_H(a) = \left| \frac{a \cdot H'(a)}{H(a)} \right| = \left| \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \right| = \frac{100a^2}{100a^2 - 1}, \quad \text{da } a > \frac{1}{10}.$$

Der gesuchte Grenzwert lautet also

$$\lim_{a \rightarrow \frac{1}{10}} \kappa_H(a) = \infty, \quad \text{da der Zähler gegen Eins und der Nenner gleichzeitig gegen Null konvergiert.}$$

D.h. die Kondition des Problems $H(a)$ ist in diesem Fall sehr schlecht.

- b) Die Kondition ist gemäss a) schlecht, und somit kann die Auslöschung *nicht* vermieden werden.

Lösung 2 *Schlusspr*

- a) Durch Umschreiben des Cosinusters in eine Sinusschwingung erhält man als linke Seite der Ungleichung

$$2 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Damit lässt sich das Zeigerdiagramm erstellen, und man erhält

$$A = \sqrt{5}, \quad \tan(\varphi) = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \quad \text{und damit} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}}\right) \quad (1. \text{ Quadrant!}).$$

- b) Gleichheit erhält man in der Ungleichung an den Stellen

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \varphi \quad \text{und} \quad t_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \varphi.$$

Damit lauten die Lösungen der Ungleichung

$$L = \{t \in [t_1, t_2] + k \cdot 2\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Lösung 3 *Assessment*

- a) Durch Umschreiben von $f_2(t)$ in eine Sinusschwingung erhält man

$$f_2(t) = \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Damit lässt sich das Zeigerdiagramm erstellen, und man erhält

$$A = \sqrt{17} \quad \text{und} \quad \tan(\varphi) = \frac{-5}{-3} \quad \text{und damit} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) + \pi \quad (3. \text{ Quadrant!}).$$

b) Der zurückzulegende Winkel α des Drehzeigers lautet

$$\alpha = 2t = \frac{3\pi}{2} - \varphi + \pi = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{5}{3}\right).$$

Damit erhält man die gesuchte Zeit

$$t = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{5}{3}\right).$$

Lösung 4 *Schlusspr*

a) Als Endschema der LR -Zerlegung erhält man mit dem Gaußalgorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Die einzelnen Matrizen lauten somit

$$L = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array} \right), \quad R = \left(\begin{array}{ccc} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{array} \right), \quad P = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

b) Im ersten Schritt $Lc = Pb$ erhält man

$$c = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{array} \right), \quad \text{wobei} \quad Pb = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0.25 \end{array} \right).$$

Im zweiten Schritt $Rx = c$ erhält man schliesslich die Lösung

$$x = \left(\begin{array}{c} -0.25 \\ 0 \\ 0.5 \end{array} \right).$$

Lösung 5 *Schlusspr*

a) Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, dass es zwei Lösungen geben muss. Diese lauten $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$.

b) Eine erste Umformung der Gleichung lautet

$$x = \underbrace{2^{x-1}}_{F(x)},$$

und damit die entsprechende Iterationsgleichung

$$x_{k+1} = 2^{x_k-1}.$$

Der zugehörige Konvergenzquotient lautet demnach

$$q = |F'(x)| = \ln(2) 2^{x-1}.$$

Für $s_1 = 1$ erhält man also $q = \ln(2) < 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_1 attraktiv.

Für $s_2 = 2$ erhält man jedoch $q = \ln(4) > 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_2 abstossend.

Eine zweite Umformung lautet

$$x = 1 + \underbrace{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}_{G(x)},$$

mit der zugehörigen Iterationsgleichung

$$x_{k+1} = 1 + \frac{\ln(x_k)}{\ln(2)}.$$

Der entsprechende Konvergenzquotient lautet demnach

$$q = |G'(x)| = \frac{1}{x \ln(2)}.$$

Für $s_2 = 2$ erhält man diesmal $q = \frac{1}{\ln(4)} < 1$, d.h. bei dieser Iteration ist s_2 jetzt attraktiv.

Lösung 6 *Schlusspr*

a) Mit $z = x + jy$ erhält man die Gleichung

$$|(x+3) + j(y-2)| = 3,$$

und durch Betragsbildung also

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Die Lösungsmenge entspricht also einer Kreislinie vom Radius $r = 3$, um den Mittelpunkt $M = -3 + 2j$ in der Gauss'schen Zahlenebene.

b) In Polardarstellung gilt

$$z = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{6}}.$$

Daraus erhält man die Gleichung

$$z^{10} = 2^5 e^{-j\frac{5\pi}{3}} = 32 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) = 16 + j 16\sqrt{3}.$$

c) Die Nullstellen lauten

$$z_1 = 2, \quad z_{2,3} = \pm j.$$

Lösung 7 *Schlusspr*

a) Durch Umschreiben des Terms $\cos(4x)$ auf $\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$ erhält man

$$\frac{\sin(2x) \cdot (1 - \cos(2x))}{-\sin^2(2x)}.$$

Kürzen und Umschreiben der verbleibenden Terme vom doppelten auf den einfachen Winkel ergibt sodann

$$-\frac{2 \cdot \sin^2(x)}{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} = -\tan(x).$$

b) Es gilt $\cos(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Damit erhält man die Gleichung

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - (1 + \sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Die Substitution $u := \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ergibt sodann

$$2u^2 - (1 + \sqrt{2})u + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

mit den Lösungen

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Durch Rücksubstitution erhält man schliesslich die gesuchten Lösungen

$$u_1 : \quad x_k = \frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad \text{oder} \quad x_k = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$u_2 : \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi \quad \text{oder} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 4\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lösung 8 Assessment

a) Durch Umformen erhält man die äquivalente Gleichung

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x)).$$

- 1. Fall: $\cos(x) - \sin(x) = 0$
 $\implies \tan(x) = 1 \implies x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 2. Fall: $\cos(x) - \sin(x) \neq 0$
 $\implies \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \implies \sin(x) = 0 \implies x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Die Lösungsmenge lautet also insgesamt

$$L = \left\{x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{x = k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Die beiden Sinusterme ergeben

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(\alpha) = \sqrt{2} \sin(\alpha).$$

Die beiden Cosinusterme ergeben

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha).$$

Daraus wird in der Summe schliesslich

$$\sqrt{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)).$$