Klasse WI09t **MLAN2 – Schlussprüfung** 17. Juni 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung durch Erraten.

Tipp: Skizzieren Sie die Kurven sowohl der linken als auch der rechten Seite der Gleichung in demselben Koordinatensystem.

Einheiten: auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen.

b) Die Gleichung soll nun mit einer Fixpunkt-Iteration numerisch gelöst werden. Geben Sie für jede Lösung jeweils eine geeignete Iterationsgleichung so an, dass die Lösung zu einem attraktiven Fixpunkt wird. Geben Sie den entsprechenden Konvergenzquotienten an.

c) Sind die Iterationen in b) schneller oder langsamer als die Bisektion? (mit Begründung)

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Gleichung und stellen Sie $\mathbb{L}$ in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|z - 2j + 3| = 3.$$

b) Es sei $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - j\sqrt{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}$ gegeben. Gesucht ist die kartesische Form der Potenz z^{10}.

c) Bestimmen Sie alle, d.h. auch die komplexen, Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

Aufgabe 3

a) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{\sin(2x) \cdot (1 - \cos(2x))}{\cos(4x) - \cos^2(2x)}$$

b) Lösen Sie die folgende trigonometrische Gleichung

$$\frac{1 - \cos(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Aufgabe 4

Die Ungleichung

$$2 \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1 \tag{1}$$

soll mit Hilfe von Zeigern gelöst werden, d.h. die linke Seite der Ungleichung wird als harmonische Schwingung $A \cdot \sin(t + \varphi)$ aufgefasst.

a) Zeigerdiagramm: bestimmen Sie die Amplitude A, sowie die Phase φ.

b) Wie gross wird die linke Seite von (1) maximal, wie gross ist dieser maximale Wert und für welche t wird er angenommen?

c) Lösen Sie (1) mit den Resultaten aus a).

Graphische Darstellung der Lösungen, Einheiten: auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_\infty -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{b}_1 = (0,\, 1 + \varepsilon)^T$

b2) $\hat{b}_2 = (\varepsilon,\, 1)^T$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie je für $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ den relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ bzw. $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$ und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung.

Was stellen Sie fest?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0. \tag{2}$$

a) Die Nullstellen von (2) sollen mit der *Regula falsi* bestimmt werden. Wie müssen die entsprechenden Intervalle $[a, b]$ gewählt werden?

Graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 2$ Häuschen.

b) Die Methode von *Newton* mit dem Startwert $x_0 = \frac{2}{3}$ soll als zweite Methode angewendet werden. Ist für x_0 die Konvergenzbedingung erfüllt?

c) Falls nein, überprüfen Sie die Konvergenzbedingung für x_1. Welche der beiden Nullstellen wird erhalten?

Viel Erfolg!

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 17.06.10

Lösung 1

a) Graphik; Lösungen $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$.

b) $x = F_1(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{x-1}$ mit $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \cdot 2^x$.
$F_1'(s_1) = q_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) < 1$, d.h. s_1 ist für F_1 ein attraktiver Fixpunkt
$F_1'(s_2) = 2 \cdot \ln(2) > 1$, d.h. s_2 ist für F_1 ein abstossender Fixpunkt.
$x = F_2(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(2x) = 1 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ mit $F_2'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(2)}$
$F_2'(s_1) = \frac{1}{\ln(2)} > 1$, d.h. s_1 ist für F_2 ein abstossender Fixpunkt.
$F_2'(s_2) = q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} < 1$, d.h. s_2 ist für F_2 ein attraktiver Fixpunkt.

c) $q_1 < \frac{1}{2}$ und $q_2 > \frac{1}{2}$, d.h. F_1 ist schneller und F_2 ist langsamer als die Bisektion.

Lösung 2

a) $z = x + jy \Longrightarrow |(x+3) + j(y-2)| = 3$ und damit: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$.
Die gesuchte Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist die Kreislinie des Kreises mit Mittelpunkt $M(-3, 2)$ und Radius $r = 3$.

b) $z = r \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{11\pi}{3}} \Longrightarrow$
$z^{10} = r^{10} \cdot e^{j\varphi \cdot 10} = 2^5 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}} = 32 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16 \cdot (1 + j \cdot \sqrt{3})$

c) $z_1 = 2$ mit dem Hornerschema oder durch erraten.
$p(z) = (z-2) \cdot (z^2 + 1)$, d.h. $z_{2.3} = \pm j$.

Lösung 3

a) $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$ und damit erhalten wir

$$\frac{\sin(2x) \cdot (1 - \cos(2x))}{-\sin^2(2x)} = -\frac{(1 - \cos(2x))}{\sin(2x)} = -\frac{2 \cdot \sin^2(2x)}{2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)} = -\tan(x)$$

.

b) $\cos(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ und damit $2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - (1 + \sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
Substitution: $u := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow u^2 - \frac{(1+\sqrt{2})}{2} \cdot u + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$, also $u_1 = \frac{1}{2}$ und $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Rücksubstitution:

- u_1: $x_k = \frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi$ oder $x_k = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- u_2: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi$ oder $x_k = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 4\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung 4

Linke Seite von (1) als Sinus–Schwingung:
$2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$

a) Graphik: $P_1(1, \sqrt{3})$ und $P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$A = |\vec{a}(0)| = \sqrt{5}$, $\tan(\varphi) = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$, also $\varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}\right)$

b) Maximaler Wert der linken Seite von (1) ist $\sqrt{5}$. Er wird für $t + \varphi = \frac{\pi}{2}$, also für $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$ zum ersten Mal angenommen, alle Werte für die dieses Maximum angenommen wird: $t_k = \frac{\pi}{2} - \varphi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Gleichheit: Wert rechts: $t_{\text{rechts}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \varphi$

Wert links: $t_{\text{links}} = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \varphi$ und damit erhalten wir die Lösungen für die Ungleichung (1): $t \in [t_{\text{rechts}}, t_{\text{links}}] + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung 5

a) $\|A\|_\infty = 3$, Zeilenmaximum, $A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix}$ und damit
$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 6 \cdot 10^4 + 3.$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k$ für $k = 1, 2$

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\Delta\hat{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ für $k = 1, 2$:

$$\Delta\hat{x}_1 = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon$$

und

$$\Delta\hat{x}_2 = \varepsilon \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2\varepsilon \cdot 10^4$$

- theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}\|_1 = \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}\|_1 = (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$
- für $\hat{b}_1$ ist diese Abschätzung zu pessimistisch!, da $\varepsilon \leq (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$, d.h. linke und rechte Seiten haben stark verschiedene Grössenordnungen.
- für $\hat{b}_2$ ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, da $2 \cdot \varepsilon \cdot 10^4 \leq (6 \cdot 10^4 + 3) \cdot \varepsilon$, d.h. linke und rechte Seite der Ungleichung sind von derselben Grössenordnung.

Lösung 6

a) Graphik: Wahl der entsprechenden Intervalle: $[-1 - c_1, -1 + c_1]$, $c_1 < 3$ für $x_1 = -1$
und $[2 - c_2, 2 + c_2]$, $c_2 < 3$ für $x_2 = 2$.
Das gewählte Intervall darf nur eine Nullstelle enthalten, deshalb müssen $c_1, c_2 < 3 = x_2 - x_1$ sein.

b)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k - 2}{2x_k - 1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$x_0 = \frac{2}{3}$:

$$L(x) = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(x^2 - x - 2) \cdot 2}{(2x-1)^2} \right| \qquad L(x_0) = 40!$$

Die Konvergenzbedingung für x_0 ist nicht erüllt.

c) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - x_0 - 2}{2x_0 - 1} = \frac{22}{3}$

$L(x_1) = \frac{400 \cdot 2}{(41)^2} = \frac{800}{1681} < \frac{1}{2} < 1$, d.h. die Konvergenzbedingung ist bereits für x_1 erfüllt.

Wir haben Konvergenz gegen $x_2 = 2$.