Klasse WI09t **MLAN1 / MLAN2 Assessment** 24. August 2010

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Es sei m eine reelle Zahl und $|\mu| < 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = m - \mu \sin(x) \tag{1}$$

im Intervall $[m - \pi,\, m + \pi]$ eine eindeutige Lösung hat.
(Banach'scher Fixpunktsatz über das Iterationsverfahren $x = F(x)$)

- Bevor Sie rechnen: graphische Darstellung von (1) für $m = 2$ und $\mu = 0.75$.
- Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen, d.h. $\pi \mathrel{\hat{=}} 12$ Häuschen.

Aufgabe 2

a)

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad z = \frac{1}{3} + j \cdot \frac{2}{3} \tag{2}$$

Studentin A behauptet, dass die Reihe in (2) konvergiert, Student B hingegen behauptet gerade das Gegenteil. Wer hat Recht? (*mit* Begründung)

Tipp: z in Exponentialform

b) Graphische Darstellung aller Lösungen von

$$z^6 = -64j \tag{3}$$

in der Gauss'schen Ebene. Einheiten: auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen.

Geben Sie die Lösungen von (3) in kartesischer Form an.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$1 - \tan(x) = \cos(2x). \tag{4}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -j \\ 2j & 1+j \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie X so, dass die Gleichung

$$2X + (A + B)^T = j \cdot C^T$$

gültig ist. Beachten Sie: $j = \sqrt{-1}$, d.h. die Matrix C hat komplexwertige Elemente.

Aufgabe 4

Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen-Maximum-Strategie* die LR-Zerlegung von A, d.h. Matrizen L, R und P, mit $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei harmonische Schwingungen:

$$f_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Grössen A und φ der Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi).$$

Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$. Einheiten: auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 2$ Häuschen.

b) Für welchen kleinsten Wert $t > 0$ liegt der Zeiger zum ersten mal auf der *positiven* y-Achse?

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte $A(15, 1, 2)$, $B(6, 7, 0)$, $D(9, -6, 8)$ und $M(16, 4, 6.5)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und D Eckpunkte eines Würfels $ABCDEFGH$ sind. Weiter soll M der Mittelpunkt der Seitenkante AE sein.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken F und H.

MLAN1/2 Lösungen Assessment 24.08.10

Lösung 1

- Grafik
- Überprüfung der verlangten Voraussetzungen: $I = [m - \pi, m + \pi]$.
  - i) $F(x) = m - \varepsilon \cdot \sin(x)$ ist stetig auf I.
  - ii) Randpunkte: $\sin(m \pm \pi) = -\sin(m)$, d.h. $F(m \pm \pi) = m + \varepsilon \sin(m) \in I$,
    weiter gilt: $F_{\text{min}} = m - \varepsilon \leq F(x) \leq m + \varepsilon = F_{\text{max}} \Longrightarrow F(I) \subset I$.
  - iii) $F'(x) = -\varepsilon \cdot \cos(x) \Longrightarrow |F'(x)| \leq |\varepsilon| < 1$.

Lösung 2

a) $z = r \cdot e^{j\varphi}$, wobei $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ und $\varphi = \arctan(2)$, d.h. $|z| = r = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$.
Die Reihe in (2) konvergiert genau dann, falls $|z| < 1$, m.a.W. die gegebene Reihe ist konvergent, Studentin A hat Recht, zudem gilt: $s = \frac{1}{1-z} = \frac{3}{4} \cdot (1 + j)$.

b) $-64j = 64 \cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Also $z_k = 2 \cdot e^{j\varphi_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, wobei $\varphi_k = \frac{1}{6} \cdot (\frac{3\pi}{2} + k2\pi) = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$
Graphische Darstellung der Lösungen von (3): reguläres 6 -Eck um $\frac{\pi}{4}$ im Gegenuhrzeigersinn gedreht.
Kartesische Form der Lösungen von (3):

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot (1 + j) \quad z_1 = -1 + j\sqrt{3} \quad z_2 = -\sqrt{3} + j \quad z_3 = -\sqrt{2} \cdot (1 + j) \quad z_4 = 1 - j\sqrt{3} \quad z_5 = \sqrt{3} - j$$

Lösung 3

a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))$ und damit erhalten wir aus (4)

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))$$

- erster Teil der Lösung: $\cos(x) - \sin(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(x) = 1$, also $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- zweiter Teil der Lösung: $\cos(x) - \sin(x) \neq 0 \Longleftrightarrow$

  $$\frac{1}{\cos(x)} = \cos(x) + \sin(x) \Longleftrightarrow 1 = \cos^2(x) + \cos(x) \cdot \sin(x) \Longleftrightarrow 0 = \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))$$

  also: $\sin(x) = 0$ und damit $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b)

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(j \cdot C^T - A^T - B^T\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 + 3j & -5 \\ 0 & -10 + j \end{pmatrix}$$

dabei ist

$$j \cdot C^T = \begin{pmatrix} 3j & -2 \\ 1 & -1 + j \end{pmatrix}$$

Lösung 4

Gauss-Algorithmus, Endschema:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung 5

a) $\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$, damit Graphik, wobei $P_1(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ und $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A = \sqrt{17}$ und $\tan(\varphi) = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$, im dritten Quadranten:

$\Longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) \pm \pi$, je nachdem, wie gerechnet wird.

b) Damit haben wir

- entweder:
  $\varphi = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) - \pi < 0$ und damit: $2t + \varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$
- oder:
  $\varphi = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) + \pi > 0$ und damit: $2t + \varphi = \frac{5\pi}{2} \Longrightarrow t = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{5}{3}\right) = 1.841\ldots$

Lösung 6

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

- erste Behauptung: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 11$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
- zweite Behauptung: $|\overrightarrow{AM}| = 5.5 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}|$ und $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

b)

$$\overrightarrow{0F} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow F(8,\, 13,\, 9)$$

$$\overrightarrow{0H} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \Longrightarrow H(11,\, 0,\, 17)$$

weitere Aufgaben

Aufgabe 7 *neu, evtl.* $4 \times 4-$

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 8 *neu, Steffensen*

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0\,. \tag{5}$$

Die Nullstellen von (5) sollen mit der Iteration

$$x_{k+1} = 2 - x_k^2 \tag{6}$$

und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ bestimmt werden.

a) Erhalten Sie mit (6) eine der beiden Nullstellen von (5)?
(*mit* Begründung) graphische Darstellung, Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 2$ Häuschen.

Falls Sie a) mit einem Nein beantworten, werden folgende Auswege betrachtet:

bi) Beschleunigung von (6) mit Steffensen: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ den Wert $x_0^{(1)}$ und bestimmen Sie damit

$$q_{\text{Steffensen}} \approx \left| \frac{x_0^{(1)} - s}{x_0 - s} \right|.$$

.

bii) Methode von Newton für (5): bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ die Werte x_1 und x_2. Ist die Konvergenzbedingung für x_0 erfüllt?

Welcher der beiden Werte $x_0^{(1)}$ und x_2 ist qualitativ besser?

Aufgabe 9 *neu, Vektorgeometrie*

Es sei g eine gerade durch die Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,1,1)$ und h sei die gerade durch die Punkte $C(0,0,1)$ und $D(1,0,1)$.
Gegeben ist weiter die Ebene $E\colon x - 2y - 2z = 1$.
Gesucht: Ebene $E_1 \parallel E$ so, dass ihre Schnittpunkte mit den Geraden g und h eine möglichst kurze Strecke begrenzen.

Lösung 7 *alt*

a) $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 9\sqrt{2}$ und $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AQ}\right| = 3\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $C(6,\, -3,\, 4)$.

$\overrightarrow{0F} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $F(4,\, 4,\, 3)$

c) $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ =Normalvektor der Ebene $E = E(A, B, C)$.

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow S(6,\, 6,\, 13)$

d)

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SA}||\overrightarrow{SB}|} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

d.h. es handelt sich um ein reguläres Tetraeder.

Lösung 8 *alt*

Gauss-Algorithmus

a) Vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch nach einem Schritt.

Tableau nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	b	2
.	a	0	a
.	$2a$	$b-1$	$2a+1-b$

$a = 0$ und $b = 1$: $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ und $x_1 = 2 - \nu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

b) Vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch nach zwei Schritten.

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	b	2
.	1	0	1
.	.	$b-1$	$1-b$

$a \neq 0$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 2 - a - \mu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R},$$ Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$.

oder

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	b	2
.	.	$b-1$	$1-b$
.	.	.	.

$a = 0$ und $b \neq 1$: $x_3 = -1$, $x_2 = \mu$ und $x_1 = 2 + b$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R},$$ Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$.

c) $a \neq 0$ und $b \neq 1$

Lösung 9 *alt*

a) Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhält man

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 2x \\ -1 & 0 & 2 \\ z^2 & 0 & -2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & -1 & -4y \\ x^2 & 1 & 2x \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Berechnen der beiden $3 \times 3-$ Determinanten liefert sodann

$$\det(A) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y - 2z.$$

b) Die Lösung ist eindeutig, falls $\det(A) = -(\beta - \alpha) \cdot (\beta - 1) \neq 0 \iff \alpha \neq \beta$ und $\beta \neq 1$.

Lösung 10 *alt*

a) Mit $z = x + jy$ erhält man die Gleichung

$$|(x-a) + j(y-b)| = |(x-1) + j(y-3)|,$$

und durch Betragsbildung also

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2.$$

Daraus ergibt sich durch Umformen die Lösungsmenge

$$L = \left\{ z = x + jy \;\middle|\; y = \frac{a-1}{3-b} \cdot x + \frac{10 - a^2 - b^2}{6 - 2b} \right\}.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der geforderten Lösungsmenge ergibt jetzt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a &= 4 - b, \\ 0 &= a^2 + b^2 - 2b - 4 \end{cases}$$

Die Lösungen davon lauten

$$(a,\, b) = (1,\, 3) \qquad \text{und} \qquad (a,\, b) = (2,\, 2).$$

Setzt man die erste Lösung in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhält man als Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, was nicht korrekt ist. Daher lautet die *einzig richtige* Lösung $(a,\, b) = (2,\, 2)$.

b) Durch Umformen des Ausdrucks Z erhält man

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Nullsetzen des Imaginäranteils liefert nach Umformungen die Lösungen

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Lösung 11 *alt*

a) $F(x) = 2 - x^2$, $F'(x) = -2x$. $|F'(s_k)| > 1$ für beide Nullstellen, da $s_1 = 1$ und $s_2 = -2$
Falls einfach iteriert wird, erhält man: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_k = -2$ für $k \geq 2$,
d.h. $s_2 = -2$ erhält man zufällig!

bi) $x_0 = 0$ $x_1 = 2$ und $x_2 = -2 \Longrightarrow x_0^{(1)} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{(x_2 - 2x_1 + x_0)} = \frac{2}{3}$

bii) $f(x) = x^2 + x - 2 \Longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 2}{2x_k + 1}$
Mit $x_0 = 0$ erhalten wir $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{6}{5}$
$L(x_k) = \left|\frac{f(x_k)\cdot f''(x_k)}{(f'(x_k))^2}\right|$ und damit: $L(x_0) = 4 > 1$ aber bereits $L(x_1) = \frac{8}{25} < 1$.
Mit $x_0 = 0$ haben wir Konvergenz gegen $s_1 = 1$.

x_2 ist qualitativ besser als $x_0^{(1)}$, da $|x_2 - s_2| = \frac{1}{6} < |x_0^{(1)} - s_2| = \frac{1}{3}$.

Lösung 12 *alt*

a) Durch Umschreiben von $f_2(t)$ in eine Sinusschwingung $(\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right))$ erhält man

$$f_2(t) = 5\,\sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Damit lässt sich das Zeigerdiagramm erstellen, und man erhält

$$A = 7 \qquad \text{und} \qquad \varphi = -\arctan(4\sqrt{3}) + \pi \qquad \text{(2. Quadrant!)}.$$

b) Mit den Ergebnissen aus a) erhält man die Gleichung

$$7\,\sin\left(t + \pi - \arctan(4\sqrt{3})\right) = \frac{7}{2}.$$

Deren Lösungen lauten

$$t = \arctan(4\sqrt{3}) - \tfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi$$

oder $\qquad (k \in \mathbb{Z}).$

$$t = \arctan(4\sqrt{3}) - \tfrac{\pi}{6} + k\,2\pi$$