Klasse XX0? **M??? alter Test** dd.mm.yy

Name:

Aufgabe 1

Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 1 = x + \sqrt{x}$$

mit der Lösung $x_1 = 1$.
Diese Lösung soll mit einer Fixpunktiteration bestimmt werden. Dazu wurden folgende Vorschläge gemacht:

$$\text{i) } x_{n+1} = x_n^2 - \sqrt{x_n} + 1 \qquad \text{ii) } x_{n+1} = \sqrt{x_n + \sqrt{x_n} - 1} \qquad \text{iii) } x_{n+1} = \left(x_n^2 + 1 - x_n\right)^2$$

a) Welche der vorgeschlagenen Varianten ist konvergent? (*mit* Begründung)

b) Vergleichen Sie die konvergente(n) Variante(n), wobei $x_0 = 4$ verwendet wird, mit der Bisektion.
Dabei wird für die Bisektion das Startintervall $[a, b] = [0.5, 1.5]$ gewählt. Das Resultat soll $3-$ stellig korrekt sein. Welches der Verfahren ist schneller?
(*mit* Begründung, inkl. Angabe der Anzahl der dazu notwendigen Schritte)

Aufgabe 2

Sei $F(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot |x|$.

a) Wie muss das Intervall $[a, b] = [-1, \ldots]$ gewählt werden, damit alle Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

b) Graphische Darstellung von $x = F(x)$ auf dem in a) gewählten Intervall.

c) Bestimmen Sie den Fixpunkt s. Wie schnell konvergiert diese Iteration?

d) Ist eine Bisektion für dieses Beispiel schneller? (*mit* Begründung)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x - 4 = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie algebraisch die Lösungen s_1 und s_2 von (1).

b) (1) wird nun mit gewöhnlicher Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Lösung ein attraktiver Fixpunkt sein.
Geben Sie eine geeignete Iterationsgleichung an.
Berechnen Sie damit ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ die Folgewerte x_1 und x_2.
Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.
Wie gross ist der Konvergenzquotient q wirklich?

c) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte x_1, x_2 und x_3 sowie die Werte x_0' und x_1' nach dem *Aitken'schen* Δ^2- Verfahren.
Bestimmen Sie damit den Näherungswert

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{x_1' - s_1}{x_0' - s_1} \right|.$$

Vergleichen Sie diesen Näherungswert für q_{Aitken} mit q aus b).

Lösung 1

a) $s = 1$, also $s = F(s)$ und für Konvergenz: $|F'(s)| < 1$

$$\text{i) } F'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}},\ F'(1) = \frac{3}{2} > 1 \qquad \text{ii) } F'(1) = \frac{3}{4} < 1 \qquad \text{iii) } F'(1) = 2 > 1$$

d.h. nur die Variante ii) ist konvergent.

b) Bisektion: in jedem Schritt wird der Fehler halbiert: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^4}{5}\right)$

Varainte ii): in jedem Schritt wird der Fehler um $q = \frac{3}{4}$ verkleinert: $n > \frac{\log\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$

Variante ii) ist also langsamer als die Bisektion.

Lösung 2

a) $[-1, b]$, wobei $b > 4$, damit $F(I) \subset I$. F stetig, und $L = \frac{1}{2} < 1$

b) Graphik

c) $s = 4$ und $q = F'(s) = \frac{1}{2}$

d) Bisektion und Iteration sind gleich schnell, da $q = \frac{1}{2}$, pro Schritt wird der Fehler halbiert.

Lösung 3

a) $(x-1)(x+4) = 0 \Longrightarrow s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.

b) $s_1 = 1$ soll attraktiver Fixpunkt sein. $x_{k+1} = F(x_k)$, wobei $F(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$ mit $F'(x) = -\frac{2}{3}x$,

$$x_0 = 2 \qquad x_1 = F(x_0) = 0 \qquad x_2 = F(x_1) = \frac{4}{3}$$

also $q \approx |F'(x_2)| = \frac{8}{9} < 1$. Der wirkliche Wert für q ist: $q = |F'(s_1)| = \frac{2}{3}$.

c)

$$x_0 = 2 \quad x_1 = F(x_0) = 0 \quad x_2 = F(x_1) = \frac{4}{3} \quad x_3 = F(x_2) = \frac{20}{27}$$

und damit

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{4}{5} \qquad x_1' = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_3 - 2x_2 + x_1} = \frac{12}{13}$$

und schliesslich

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{\frac{12}{13} - 1}{\frac{4}{5} - 1} \right| = \frac{5}{13}$$

Obwohl der Startwert x_0 schlecht ist, (da $q \approx |F'(x_2)| < 1$ nur wenig kleiner als 1, es ist sogar $|F'(x_0)| > 1$!), ist dieser Näherungswert für q_{Aitken} bereits sehr gut und deutlich kleiner als q.