Klasse ME09b | **MND1 Schlussprüfung** | 26. Januar 2011

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Quadraturformel

$$Q := \sum_{k=0}^{2} w_k \cdot f(\xi_k) \tag{1}$$

auf dem Standard–Intervall $[-h, 3h]$ mit $\xi_0 = -h$, $\xi_1 = h$ und $\xi_2 = 3h$.

Bestimmen Sie die Gewichte w_k, $k = 0, 1, 2$ in (1) so, dass alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden.

b) Mit der Quadraturformel (1) aus a) soll das Integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = \cos(x) \tag{2}$$

numerisch approximiert werden. Dabei wird das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in zwei gleichlange Teilintervalle zerlegt.

Benützen Sie die Symmetrie der $\cos$ –Funktion so, dass Sie die Quadratur (1) nur auf einem Teilintervall anwenden müssen.

c) Wie gross ist der absolute Fehler, der in b) mit der Quadratur (1) gemacht wird?

Aufgabe 2

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$y' + y + y^2 = 0 \tag{3}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.
Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich in (3) ?

Aufgabe 3

Die Gleichung

$$(1 + x) \cdot e^{x-1} = 1 \tag{4}$$

hat in der Nähe von $x = 0.55$ eine Nullstelle.

a) Wie muss mit einer gewöhnlichen Iteration gerechnet werden, damit Konvergenz für $x_0 = 0.4$ eintritt? (*mit* Begründung)

b) (4) soll nun mit der Methode von Newton gelöst werden. Formulieren Sie die entsprechende Iterationsvorschrift.

Ist die Konvergenzbedingung für $x_0 = 1$ erfüllt?

Bitte wenden

Aufgabe 4

a) Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung ist mit

$$(5) \qquad y_h(t) = 2 \cdot e^{-\delta t} \cdot \{a_1 \cdot \cos(2t) + b_1 \cdot \sin(2t)\} \qquad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Geben Sie eine Fundamentalbasis der Lösungen in (5) an. Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung?

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$(6) \qquad y'' + 4y' + 3y = 0$$

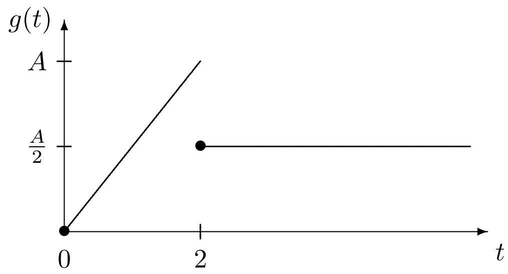
mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = -5$. Bestimmen Sie die Nullstelle der Lösung und stellen Sie die Lösung graphisch dar. (Einheiten auf beiden Achsen: $1 \hat{=} 4$ Häuschen)

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \dot{y} + \frac{3}{2} \cdot y = g(t)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Die Anregung $g(t)$ ist wie folgt gegeben:



a) Bestimmen Sie die Lösung von (7). Die Lösung $y(t)$ soll überall stetig sein.

b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung, d.h. $y_\infty := \lim_{t \to \infty} y(t)$.

Aufgabe 6

a) Die Gleichung

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

hat in der Nähe von $x = 1.5$ eine Nullstelle. Wie müssen Sie ein Startintervall für die Bisektion wählen, damit Sie diese Nullstelle erhalten? Wieviele Iterationen brauchen Sie bei Ihrer Wahl, um 4 Dezimalen nach dem Komma korrekt zu erhalten?

b) Um die Gleichung $f(x) = 0$ mit einem Iterationsverfahren numerisch zu lösen, kann sie wie folgt geschrieben werden:

$$(8) \qquad x = \underbrace{x + g(x) \cdot f(x)}_{=:F(x)}$$

Wie müssen Sie $g(x)$ in (8) wählen, damit die Iteration quadratisch konvergiert?

c) Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{2} + c \qquad |c| \leq \frac{3\pi}{4}$$

Für welche c hat die Gleichung keine, eine, zwei oder drei Lösungen?

Graphische Darstellung: $1 \hat{=} 4$ Häuschen, $\pi \hat{=} 12$ Häuschen.

ME09b MND1 Lösungen Schlussprüfung 26.01.11

numerische Integration

Lösung 1

a) zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4h &= w_0 + w_1 + w_2 \\ 4h^2 &= w_0(-h) + w_1 h + w_2 3h \\ \frac{28h^3}{3} &= w_0(-h)^2 + w_1 h^2 + w_2 9h^2 \end{aligned}$$

Endschema:

w_0	w_1	w_2	1
1	1	1	$4h$
0	2	4	$8h$
0	0	8	$\frac{16h}{3}$

Gauss-Algorithmus liefert: $w_0 = \frac{2h}{3}$, $w_1 = \frac{8h}{3}$ und $w_2 = \frac{2h}{3}$

b) $I = 2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$, da $\cos$ eine gerade Funktion.

Transformation $[-h, 3h] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ $x = m\xi + q$, wobei $m = \frac{\frac{\pi}{2}}{4h}$ und $q = \frac{\pi}{8}$

Mit der Quadraturformel erhalten wir

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = m \cdot \int\limits_{-h}^{3h} \cos(m\xi + q)\, d\xi \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{4h} \cdot \frac{2h}{3} \cdot \left\{\cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{12} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

Damit wird $I \approx \frac{\pi}{6} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$

c) Der absolute Fehler ist $|2 - \frac{\pi}{6} \cdot (1 + 2\sqrt{2})|$

separierbare Dgl

Lösung 2

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot (1 + y) \qquad \Longrightarrow \frac{dy}{y \cdot (1 + y)} = -dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y \cdot (1 + y)} = \int -dx = -x - C$$

PBZ der ersten Integranden:

$$\frac{1}{y \cdot (1 + y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 + y} \Longrightarrow 1 = A \cdot (1 + y) + By \Longrightarrow A = 1 \quad B = -1$$

und damit

$$\ln\left|\frac{y}{1 + y}\right| = -x - C \Longrightarrow \frac{y}{1 + y} = C \cdot e^{-x}, C \in \mathbb{R} \Longrightarrow y_h(x) = \frac{C}{e^x - C}$$

Bestimmung von C:

$$C = \frac{y_0}{1 + y_0} \Longrightarrow y(x) = \frac{y_0}{(1 + y_0) \cdot e^x - y_0} \quad x \geq 0$$

Es handelt sich um eine nicht–lineare, homogene, separierbare Dgl $1-$ter Ordnung.

nicht–lineare Gleichung

Lösung 3

a) $x = F_1(x) = e^{1-x} - 1$, $F_1'(x) = -e^{1-x}$ mit $|F_1'(0.55)| = e^{0.45} > 1$, abstossender Fixpunkt

$x = F_2(x) = \ln\left(\frac{e}{1+x}\right) = 1 - \ln(1+x)$, $F_2'(x) = -\frac{1}{1+x}$ mit $|F_2'(0.55)| = \frac{1}{1.55} < 1$, attraktiver Fixpunkt

b) Newton: $f(x) = (1+x) \cdot e^{x-1} - 1 = 0$ mit $f'(x) = (2+x) \cdot e^{x-1}$ und $f''(x) = (3+x) \cdot e^{x-1}$, also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(1+x_k) \cdot e^{x_k-1}}{(2+x_k) \cdot e^{x_k-1}} \qquad x_0 = 1$$

Konvergenzbedingung:

$$L(x) = \left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \qquad L(x_0) = \frac{4}{9} < 1$$

FB, gedämpfte Schwingung

Lösung 4

a)

$$y_1(t) = e^{-\delta t} \cdot \cos(2t) \qquad y_2(t) = e^{-\delta t} \cdot \sin(2t) \qquad \lambda_{1.2} = -\delta \pm j \cdot 2$$

Das charakteristische Polynom der Dgl lautet (Satz von Vieta):

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + (\delta^2 + 4)$, d.h.

$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + (\delta^2 + 4) \cdot y = 0$, Dgl einer schwach gedämpften Schwingung.

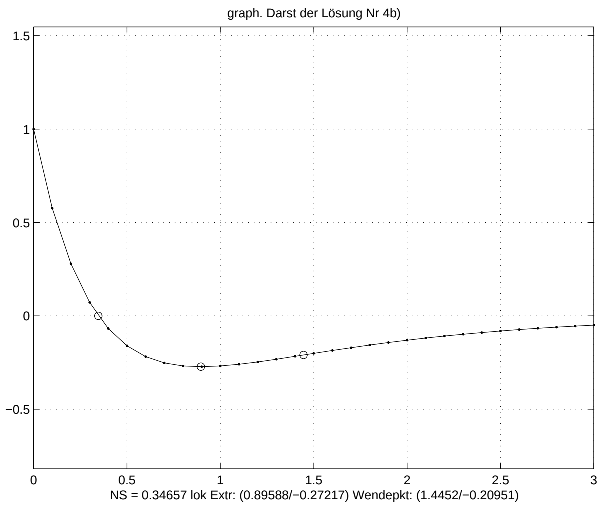
b)

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der Konstanten: $c_1 = -1$ und $c_2 = 2$, also $y(x) = -e^{-x} + 2 \cdot e^{-3x}$, $x \geq 0$.

Nullstelle der Lösung: $x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$

graphische Darstellung: $x-$Achse ist horizontale Asymptote, $y(x)$ hat eine Nullstelle, ein lokales Minimum und einen Wendepunkt



stetige Lösung

Lösung 5

a)

$$g(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \cdot t \,, & \text{falls} \quad 0 \le t < 2 \\ \frac{A}{2} \,, & \text{falls} \quad 2 \le t \end{cases}$$

- erster Teil der Lösung:

$$y_a(t) = y_h(t) + y_p(t) \qquad y_h(t) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t}, c \in \mathbb{R} \qquad y_p(t) = a_0 + a_1 t, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

  $\dot{y}_p(t) = a_1$, einsetzen und Koeffizientenvergleich

$$a_1 + \frac{3}{2} \cdot (a_0 + a_1 t) \stackrel{!}{=} \frac{A}{2} \cdot t \Longrightarrow a_1 = \frac{A}{3}, a_0 = -\frac{2A}{9}$$

  also

$$y_a(t) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{2A}{9} + \frac{A}{3} \cdot t \qquad 0 \le t < 2$$

  Bestimmung von c: $y(0) = 0 \stackrel{!}{=} c - \frac{2A}{9} \Longrightarrow c = \frac{2A}{9}$ und schliesslich:

$$y(t) = \frac{2A}{9} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{2A}{9} + \frac{A}{3} \cdot t \qquad 0 \le t < 2$$

- zweiter Teil der Lösung:
  neue AB: $y(2) = \frac{2A}{9} \cdot e^{-3} - \frac{2A}{9} + \frac{A}{3} \cdot 2 = \frac{2A}{9} \cdot \left(e^{-3} + 2\right)$

$$y_a(t) = y_h(t) + y_p(t) \qquad y_h(t) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t}, c \in \mathbb{R} \qquad y_p(t) = a_0, \quad a_0, \in \mathbb{R}$$

  einsetzen liefert: $a_0 = \frac{A}{3}$, also

$$y_a(t) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{A}{3} \qquad 2 \le t$$

  Bestimmung von c:
  $y(2) = \frac{2A}{9} \cdot \left(e^{-3} + 2\right) \stackrel{!}{=} c \cdot e^{-3} + \frac{A}{3} \Longrightarrow c = \frac{A}{9} \cdot (2 + e^3)$ und damit

$$y(t) = \frac{A}{9} \cdot (2 + e^3) \cdot e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{A}{3} \qquad 2 \le t$$

b)

$$y_\infty = \lim_{t \longrightarrow \infty} y(t) = \frac{A}{3}$$

d.h. das Langzeitverhalten wir durch die partikuläre Lösung beschrieben.

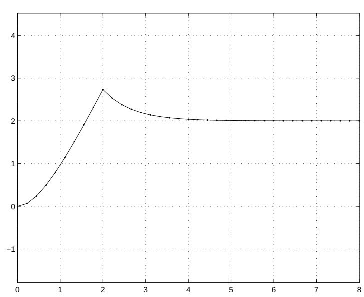


Abbildung 1: Lösung der gegebenen Differentialgleichung für $A = 6$.

nicht–lineare Gleichung

Lösung 6

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 3 > 0$, also z.B. $[a, b] = [1, 2]$

$\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ und damit: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^5}{5}\right)$

b) $s =$ NS von f, d.h. $f(s) = 0$ bzw. $s =$Fixpunkt der Iteration, d.h. $s = F(s)$.

$F(x) = x + g(x) \cdot f(x)$, $F'(x) = 1 + g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$

quadratische Konvergenz: $F'(s) = 0 \stackrel{!}{=} 1 + g'(s) \cdot f(s) + g(s) \cdot f'(s)$, da $f(s) = 0$ folgt sofort:

$F'(s) = 0 = 1 + g(s) \cdot f'(s) \Longrightarrow g'(s) = -\frac{1}{f'(s)}$ und daraus: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$

Für diese Wahl von $g(x)$ erhalten wir das Verfahren von Newton!

Lösung 7 *alt*

a) EWP von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen EV

$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit $x_H(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) in Σ_{neu}:

$\dot{x}_{\text{neu}_1} = -x_{\text{neu}_1} \Longrightarrow x_{\text{neu}_1}(t) = c_1 e^{-t}$

$\dot{x}_{\text{neu}_2} = -x_{\text{neu}_2} \Longrightarrow x_{\text{neu}_2}(t) = c_2 e^{2t}$

Elimination von t: $x_2 = c_1^2 c_2 \frac{1}{x_1^2}$, Hyperbeln $2-$ten Grades.

Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt.

$x_{\text{neu}_1}(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$

$x_{\text{neu}_2}(t) \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$

Graphik

c) $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ = stabiler Unterraum

$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ = instabiler Unterraum

Lösung 8 *alt*

a) Wronski–Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \cdot \sin(kx) & k \cdot \cos(kx) \end{vmatrix} = k \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} e^{jkx} & e^{-jk} \\ jk \cdot e^{jkx} & -jk \cdot e^{jkx} \end{vmatrix} = -2jk \neq 0$$

Es haben beide Recht.

b) $\lambda^2 + 2\delta\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1.2} = -\delta \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{1 - \delta^2}$

Frequenzgang der Amplitude ($\omega_0 = 1, \omega_E =$ Erregerfrequenz):

$$A(\omega_E) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}$$

$A(\omega_E)$ maximal, falls der Nenner minimal,
d.h. der Ausdruck unter Wurzel minimal

$$8\delta^2 - 4(\omega_0^2 - \omega_E^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\omega_E := \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{1 - 2\delta^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}$$

und damit $\delta = \frac{\sqrt{30}}{8}$, schliesslich $A_{\text{max}} = A(\omega_r) = \frac{16}{\sqrt{255}}$.

Lösung 9 *alt*

a) $A_{\text{neu}} = D = T^{-1}AT \Longrightarrow A = TDT^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

wobei $D = \text{diag}(-2, 1)$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, d.h. $T \cdot c = x(0)$, $c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $c_2 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Damit $x(t)$ beschränkt bleibt, muss $c_2 = 0$ sein, d.h. $\alpha = \beta$.

Lösung 10 *alt*

$f(t, x) = A \cdot x$

a) Euler: $x_{k+1} = x_k + h \cdot Ax_k = (I_2 + hA) \cdot x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$x_1 = (I_2 + 0.2A) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 1.0 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

b) Taylormethode: $x_{k+1} - x_k = \frac{h}{2} \cdot (Ax_k + Ax_{k+1})$ und damit $\left(I_2 - \frac{h}{2}A\right) x_{k+1} = \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_k$

$\Longrightarrow x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) x_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.5 & 1.3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 1.3 & -0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 1.38 & -0.2 \\ 1.0 & 0.58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1.22} \begin{pmatrix} 0.98 \\ 2.16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$