Klasse ME09b **MND1 erster Test** 19. Oktober 2010

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist das Integral

$$I = \int_0^1 x^3 \, dx \tag{1}$$

Betrachten Sie für (1) das Rombergschema mit fortgesetzter Halbierung.

- Geben Sie die Trapezwerte T_0, T_1 und T_2 an, sowie alle möglichen Beschleunigungen.
- Können Sie das Verhalten der berechneten Werte erklären?

Aufgabe 2

a) Das Integral

$$I = \int_0^1 e^x \, dx$$

soll mit einer Untersumme U_n approximativ bestimmt werden. Dabei wird $[0, 1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt.

Geben Sie U_n so einfach wie möglich an. (algebraische Umformungen!)

b) Gesucht sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 64 = 0 \tag{2}$$

Stellen Sie die Lösungen von (2) als Zeiger in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar

(Einheiten: auf beiden Achsen $1 \equiv 4$ Häuschen)

und geben Sie die Lösungen ebenso in der kartesischen Form an. Wie gross ist die Summe

$$\sum_{k=\ldots}^{\ldots} z_k = ?$$

aller Lösungen.

Aufgabe 3

Gegeben ist das Integral

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \tag{3}$$

(3) soll mit der Trapezmethode numerisch bestimmt werden.

a) In der Theorie wurde das Standardintervall $[0, h]$ mit $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = h$ mit den Gewichten $w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$ verwendet.

Wenden Sie diese Quadratur auf (3) an.

b) Wieder für das Standardintervall $[0, h]$ wird jetzt neu $\xi_0 = \frac{h}{3}$ und $\xi_1 = \frac{2h}{3}$ betrachtet.

Bestimmen Sie w_0 und w_1 und wenden Sie diese Quadratur auf (3) an.

c) Vergleichen Sie die beiden Werte aus a) und b) mit dem exakten Wert. Welcher der beiden Werte ist besser?

ME09b MND1 Lösungen erster Test 19.10.10

Lösung 1

$$I = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

- Trapezwerte:

$$\begin{array}{lll} h_0 = 1 & T_0 = 1 \cdot \frac{(f(0)+f(1))}{2} = \frac{1}{2} & \\ h_1 = \frac{1}{2} & T_1 = \frac{1}{2} \cdot T_0 + \frac{1}{2} \cdot M_0 = \frac{5}{16} & M_0 = 1 \cdot f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ h_2 = \frac{1}{4} & T_2 = \frac{1}{2} \cdot T_1 + \frac{1}{2} \cdot M_1 = \frac{17}{64} & M_1 = \frac{1}{2} \cdot (f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})) = \frac{14}{64} \end{array}$$

- Beschleunigungen:

$$\begin{array}{lll} T_0 & & \\ T_1 & S_1 = \frac{4T_1 - T_0}{3} = \frac{1}{4} & \\ T_2 & S_2 = \frac{4T_2 - T_1}{3} = \frac{1}{4} & C_1 = \frac{1}{4} \end{array}$$

bereits S_1 ist exakt, da $f(x) = x^3$ und $f^{(4)}(x) \equiv 0$.

Lösung 2

a) $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = k \cdot \frac{1}{n} \Longrightarrow U_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{x_k} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{k \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{e-1}{(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

Der Nenner $n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ konvergiert gegen 1, (mit Hilfe von Bernoulli).

b) $z^6 = -64 = r \cdot e^{j\varphi}$, wobei $r = 64$ und $\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Somit: $z_k = 2 \cdot e^{j\varphi_k}$, wobei $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$,
graphische Darstellung.
Kartesische Form der z_k:

$$\begin{array}{lclclcl} z_0 & = & \sqrt{3} & + & j & & \\ z_1 & = & & + & 2j & & \\ z_2 & = & -\sqrt{3} & + & j & & \\ z_3 & = & -\sqrt{3} & - & j & = & z_2^* \\ z_4 & = & & - & 2j & = & z_1^* \\ z_5 & = & \sqrt{3} & - & j & = & z_0^* \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{5} z_k = 0$$

Lösung 3

$[0, h] \longrightarrow [1, 2]$ mit $x = x(\xi) = \frac{1}{h} \cdot \xi + 1$, $0 \le \xi \le h$
und damit

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h f\left(\frac{1}{h} \cdot \xi + 1\right) d\xi \qquad (4)$$

a) Mit (4) erhalten wir

$$I \approx Q_1 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

b) Bestimmung der Gewichte:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} w_0 & + & w_1 & = & h \\ w_0 \cdot \frac{h}{3} & + & w_1 \cdot \frac{2h}{3} & = & \frac{h^2}{2} \end{array} \right. \implies w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$$

Mit (4) erhalten wir jetzt

$$I \approx Q_2 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{27}{40}$$

c) $Q_1 = 0.75$, keine Dezimale richtig

$Q_2 = 0.675$ bereits die erste Dezimale ist richtig, d.h. mit Q_2 erhalten wir eine bessere Approximation

$$|I - Q_2| < |I - Q_1|$$