Klasse ME09b **MND1 zweiter Test** 23. November 2010

Name:

Aufgabe 1

a) Die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{3} - 0.5$$

hat im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ eine Lösung.

Mit der Bisektion soll diese Lösung bestimmt werden. Dazu wird $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ als Startintervall gewählt.

- Ist diese Wahl korrekt?
- Wieviele Wiederholungen braucht es, damit im Resultat 4 korrekte Dezimalen nach dem Komma stehen, wie gross muss dabei ε sein?

b) Gegeben ist die Gleichung

$$f(x) = (x+1) \cdot (x-2) = 0\,.$$

Die eine der beiden Nullstellen soll mit gewöhnlicher Iteration bestimmt werden.

- Wie muss gerechnet werden?
- Wie gross ist der entsprechende Konvergenzquotient q?

Aufgabe 2

Es sei m eine reelle Zahl und $|\mu| < 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(1) \qquad x = m - \mu \cdot \sin(x)$$

im Intervall $[m - \pi,\, m + \pi]$ eine eindeutige Lösung hat.
(Banach'scher Fixpunktsatz über das Iterationsverfahren $x = F(x)$)

- Bevor Sie rechnen: graphische Darstellung von (1) für $m = 2$ und $\mu = 0.75$.
- Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ Häuschen, d.h. $\pi \mathrel{\hat{=}} 12$ Häuschen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gleichung

$$(2) \qquad x^2 + x - 2 = 0\,.$$

Die Nullstellen von (2) sollen mit der Iteration

$$(3) \qquad x_{k+1} = 2 - x_k^2$$

und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ bestimmt werden.

a) Erhalten Sie mit (3) eine der beiden Nullstellen von (2)?

(*mit* Begründung) graphische Darstellung, Einheiten auf beiden Achsen $1 \mathrel{\hat{=}} 2$ Häuschen.

Falls Sie a) mit einem Nein beantworten, werden folgende Auswege betrachtet:

bi) Beschleunigung von (3) mit Steffensen: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ den Wert $x_0^{(1)}$ und bestimmen Sie damit

$$q_{\text{Steffensen}} \approx \left| \frac{x_0^{(1)} - s}{x_0 - s} \right|.$$

.

bii) Methode von Newton für (2): bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ die Werte x_1 und x_2. Ist die Konvergenzbedingung für x_0 erfüllt?

Welcher der beiden Werte $x_0^{(1)}$ und x_2 ist qualitativ besser?

ME09b MND1 Lösungen zweiter Test 23.11.10

Lösung 1

a) $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{3} + 0.5 \stackrel{!}{=} 0$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{6} + 0.5 > 0$ und $f(\pi) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{3} + 0.5 < 0$, d.h. die Wahl ist korrekt.
- $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(\pi \cdot 10^4)$

b) Fixpunktiteration $x = F(x)$, wobei der Fixpunkt s attraktiv sein muss, d.h $q = |F'(s)| < 1$.

- $x = \sqrt{x+2}$, $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, $s = 2$
- $q = \frac{1}{4}$

($x = x^2 - 2$, $F'(x) = 2x$ ist für beide Fixpunkte betragsmässig grösser als eins)

Lösung 2

- Grafik
- Überprüfung der verlangten Voraussetzungen: $I = [m - \pi, m + \pi]$.
  i) $F(x) = m - \varepsilon \cdot \sin(x)$ ist stetig auf I.
  ii) Randpunkte: $\sin(m \pm \pi) = -\sin(m)$, d.h. $F(m \pm \pi) = m + \varepsilon \sin(m) \in I$,
  weiter gilt: $F_{\mathsf{min}} = m - \varepsilon \leq F(x) \leq m + \varepsilon = F_{\mathsf{max}} \Longrightarrow F(I) \subset I$.
  iii) $F'(x) = -\varepsilon \cdot \cos(x) \Longrightarrow |F'(x)| \leq |\varepsilon| < 1$.

Lösung 3

Die NS von (2) sind $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

a) Grafik. $F(x) = 2 - x^2$, $F'(x) = -2x \Longrightarrow |F'(s_1)| = 2 > 1$ und $F'(s_2) = 4 > 1$,
d.h. beide Fixpunkte sind abstossend.

bi) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{7}{4}$ und $x_2 = -\frac{17}{16}$ und damit

$$x_0^{(1)} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{1}{2} + \frac{5}{13} = \frac{23}{26},$$

d.h. Konvergenz gegen $s_1 = 1$, also

$$q_{\mathsf{Steffensen}} = \left| \frac{\frac{23}{26} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right| = \frac{3}{13}.$$

bii) Newton:

$$x_{k+1} = x_x - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 2}{2x_k + 1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L(x_0) = \left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| = \frac{5}{8} < 1, \text{ die Konvergenzbedingung ist erfüllt.}$$

$x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{9}{8}$ und $x_2 = \frac{209}{208}$, d.h. auch hier konvergiert die Folge gegen $s_1 = 1$.

Vergleich der beiden Werte: $|x_0^{(1)} - s_1| = \frac{3}{26} > |x_2 - s_1| = \frac{1}{208}$, m.a.W. x_2 ist qualitativ besser.