
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Quadraturformel

$$(1) \qquad Q := \sum_{k=0}^{2} w_k \cdot f(\xi_k)$$

auf dem Standard–Intervall $[h, 3h]$ mit $\xi_0 = h$, $\xi_1 = 2h$ und $\xi_2 = 3h$.

Bestimmen Sie die Gewichte w_k, $k = 0, 1, 2$ in (1) so, dass alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden.

b) Mit der Quadraturformel (1) aus a) soll das Integral

$$(2) \qquad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = \cos(x)$$

numerisch approximiert werden. Dabei wird das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in zwei gleichlange Teilintervalle zerlegt.

Benützen Sie die Symmetrie der $\cos -$Funktion so, dass Sie die Quadratur (1) nur auf einem Teilintervall anwenden müssen.

c) Wie gross ist der absolute Fehler, der in b) mit der Quadratur (1) gemacht wird?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls} \quad 0 \leq x < \pi \\ -\pi & \text{falls} \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. f wird auf der ganzen $x-$Achse $2\pi-$periodisch fortgesetzt.

a) Stellen Sie f graphisch dar (in Einheiten von π, wobei $\pi \widehat{=} 4$ Häuschen).

b) Die Funktion f soll durch ein trigonometrisches Polynom $3-$ten Grades approximiert werden.

Bestimmen Sie die zugehörigen Koeffizienten.

c) Können Sie in b) eine Gesetzmässigkeit herauslesen?

bitte wenden

Aufgabe 3

Ein Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ wird von

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und ein Unterraum $V \subset \mathbb{R}^3$ wird von

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$, $\dim(U + V) = ?$

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$, $\dim(U) = ?$

Aufgabe 4

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Standardbasis (= alte Basis) Σ_e mit den Vektoren e_1, e_2 und e_3 gegeben.
Eine neue Basis Σ_{neu} wird mit $b^{(1)} = 2e_1 + 3e_2$, $b^{(2)} = e_2 + e_3$ und $b^{(3)} = e_3$ gebildet.

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T der Koordinatentransformation

$$\mathcal{T}\colon \Sigma_{\text{neu}} \longrightarrow \Sigma_e$$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Vektors in der alten Basis, wenn er in der neuen Basis die Koordinaten $(2,\ -3,\ 4)^T$ hat.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Vektors in der neuen Basis, wenn er in der alten Basis die Koordinaten $(2,\ -3,\ 4)^T$ hat.

Aufgabe 5

a) Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2bx_1x_2 + 2x_2^2 + k \qquad k \in \mathbb{R},\ \text{konstant.}$$

Um was für eine Kurve handelt es sich bei $Q(x_1, x_2) = 0$ in Abhängigkeit des Parameters b ?

b) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Sei $V = \mathbb{P}_4$ = Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 4. Eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}\colon V \longrightarrow V$$

ist mit $\mathcal{F}(p) = p' + 2 \cdot p$ gegeben ($' := \frac{d}{dx}$).

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von $\mathcal{F}$ bzgl. der Monome $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

b) Bestimmen Sie den Kern von A. Ist A regulär?

c) Kann A diagonalisiert werden? (*mit* Begründung).

MLAN3 Lösungen Schlussprüfung 17.01.11

Lösung 1

numerische Integration

a) zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2h &= w_0 + w_1 + w_2 \\ 4h^2 &= w_0 h + w_1 2h + w_2 3h \\ \frac{26h^3}{3} &= w_0 h^2 + w_1 4h^2 + w_2 9h^2 \end{aligned}$$

Endschema:

w_0	w_1	w_2	1
1	1	1	$2h$
0	1	2	$2h$
0	0	2	$\frac{2h}{3}$

Gauss-Algorithmus liefert: $w_0 = \frac{h}{3}$, $w_1 = \frac{4h}{3}$ und $w_2 = \frac{h}{3}$

b) $I = 2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$, da $\cos$ eine gerade Funktion.

Transformation $[h, 3h] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ $x = m\xi + q$, wobei $m = \frac{\frac{\pi}{2}}{2h}$ und $q = -\frac{\pi}{4}$

Mit der Quadraturformel erhalten wir

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = m \cdot \int\limits_h^{3h} \cos(m\xi + q)\, d\xi \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{2h} \cdot \frac{h}{3} \cdot \left\{ \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \frac{\pi}{12} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

Damit wird $I \approx \frac{\pi}{6} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$

c) Der absolute Fehler ist $|2 - \frac{\pi}{6} \cdot (1 + 2\sqrt{2})|$

Lösung 2

Fourier Basis

a) Graphik, die gegebene Funktion ist ungerade

b)

$$trig_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} \{a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\}$$

$a_0 = 0 =$ Mittelwert von f, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, da f ungerade
$b_1 = 4$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4}{3}$, also
$f(x) \approx \frac{4}{1} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3} \cdot \sin(3x)$

c) alle $a_k = 0$, da f ungerade
$b_{2k} = 0$, d.h. alle $b_{\dots}$ mit geradem Index sind Null und $b_{2k+1} = \frac{4}{2k+1}$

Lösung 3

Unterräume
Seien $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$, spaltenweise.
$U = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| A \cdot x\right\}$ und $V = \text{span}\{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\} = \left\{y \in \mathbb{R}^3 \middle| B \cdot y\right\}$

a) somit $C = (A\ B)$: es gilt $Rang(C) = dim(U + V) = 3$, d.h. $U + V \equiv \mathbb{R}^3$,

1	-1	2	1	1	-1
0	3	-9	-1	-1	1
0	0	0	0	3	-1

$U + V = span\,\{a_1, a_2, b_2\}$, z.B.

b) $U \cap V$ wird aufgespannt von den Lösungen dieses Gleichungssystems $Ax = By$:

1	-1	2	1	1	-1
0	3	-9	-1	-1	1
0	0	0	0	3	-1

Mit dem Gauss-Algorithmus wie in a): vorzeitiger Abbruch, VB $0 = 3y_2 - y_3$, also $y_2 = \frac{1}{3} \cdot y_3$, d.h. zwei freie Parameter.

$y_1 = \mu_1$ und $y_3 = \mu_3$, somit: $y = \mu_1 (1\ 0\ 0)^T + \mu_3 (0\ \frac{1}{3}\ 1)^T$ und schliesslich $U \cap V = span\left\{b_1, \frac{1}{3} \cdot b_2 + b_3\right\}$, z.B.

Die Dimension $dim(U \cap V) = 1$, da $b_1 = \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b_2 + b_3\right)$

Geom. Interpretation: $U = E_1$ eine erste Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch Null und $V = E_2$ eine zweite Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch Null, also $U \cap V =$ Schnittgerade der beiden Ebenen durch Null.

Koordinatentransformation

Lösung 4

a)

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_{\text{alt}} = T \cdot x_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$x_{\text{alt}} = T \cdot x_{\text{neu}} \qquad \text{als Lösung eines linearen Glgsyst, ohne } T^{-1}$$

Endschema:

x_{neu_1}	x_{neu_2}	x_{neu_3}	1
1	0	0	1
0	1	0	-6
0	0	1	10

oder

$$x_{\text{neu}} = T^{-1} \cdot x_{\text{alt}} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

EWP

Lösung 5

a) $Q(x_1, x_2) = x^T \cdot A \cdot x + k$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 8 - b^2 \qquad \lambda_{1.2} = 3 \pm \sqrt{1+b^2}$$

- $\det(A) > 0$: $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$; $Q(x_1, x_2) = 0$ stellt einen verdrehte Ellipse dar, falls $b \neq 0$.
- $\det(A) = 0$: $b = \pm 2\sqrt{2}$; $Q(x_1, x_2) = 0$ stellt eine verdrehte Parabel dar.
- $\det(A) < 0$: $b < -2\sqrt{2}$ oder $2\sqrt{2} < b$; $Q(x_1, x_2) = 0$ stellt eine verdrehte Hyperbel dar.

b) Spur$(A) = 4$ und det$(A) = 5$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1.2} = 2 \pm j$$

zugheörige EV: $\lambda_1 = 2 + j$:

x_1	x_2	1
$3-j$	-5	0
2	$-3-j$	0

mit der ersten Zeile: $(3-j) \cdot x_1 = 5 \cdot x_2 \Longrightarrow v^{(1)} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3-j \end{pmatrix}$

oder mit der zweiten Zeile: $2 \cdot x_1 = (3+j) \cdot x_2 \Longrightarrow v^{(1)} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 3+j \\ 2 \end{pmatrix}$

$v^{(2)} = \left(v^{(1)}\right)^* = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3+j \end{pmatrix} = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 3-j \\ 2 \end{pmatrix}$

$T = \left(v^{(1)}\ v^{(2)}\right) \Longrightarrow A_{\text{neu}} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT$

lineare Abbildung, Monome

Lösung 6

a) $\mathcal{F}(1) = 0 + 2 \cdot 1$, $\mathcal{F}(x) = 1 + 2 \cdot x$, $\mathcal{F}(x^2) = 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$, $\mathcal{F}(x^3) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$ und $\mathcal{F}(x^4) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^4$ also

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $Ax = 0$ ist nur für die triviale Lösung $x = 0$ möglich, d.h. Kern$(A) = \{0\}$.
A ist regulär, det$(A) = 2^5 = 32 \neq 0$ (obere Dreiecksmatrix)

c) EWP von A: $p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^5 \Longrightarrow \lambda = 2$ mit alg VF$(\lambda) = 5$
aber geom VF$(\lambda) = 1$, da der Rang$(A - 2 \cdot I_5) = 4$, d.h. zu $\lambda = 2$ gibt es nur einen EV, die erste Spalte von A, m.a.W.: A ist *nicht* diagonalisierbar!