
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

numerische Integration
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
VR Struktur Skalarprodukt, Fourier–Polynom einer gegebenen Fkt.
lineare Abbildung
Basiswechsel
EWP
Hauptachsentransformation, Kegelschnitt

EWP

Aufgabe 1 *neu ??*

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 5 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem von A.

b) Geben Sie eine reguläre Matrix T an, sodass $T^{-1}AT = D =$ diagonal.

c) Ist es möglich, T in a) orthogonal anzugeben? (*mit* Begründung)

numerische Integration,

Aufgabe 2 *neu*

a) Gegeben ist die Quadraturformel

$$Q := \sum_{k=0}^{2} w_k \cdot f(\xi_k) \tag{1}$$

auf dem Intervall $[h, 3h]$ mit $\xi_0 = h$, $\xi_1 = 2h$ und $\xi_2 = 3h$.

Bestimmen Sie die Gewichte w_k, $k = 0, 1, 2$ in (1) so, dass alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden.

b) Mit der Quadraturformel (1) aus a) soll das Integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = \cos(x) \tag{2}$$

numerisch approximiert werden. Dabei soll das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in zwei gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

Benützen Sie die Symmetrie von (2) so, dass Sie die Quadratur (1) nur auf einem Teilintervall anwenden müssen.

c) Wie gross ist der absolute Fehler, der in b) mit der Quadratur (1) gemacht wird?

Fourier-Basis

Aufgabe 3 *neu*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{falls} \quad x = -\pi \quad \text{oder} \quad x = \pi \end{cases}$$

oder

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls} \quad 0 \leq x < \pi \\ -\pi & \text{falls} \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. f wird auf der ganzen $x-$ Achse $2\pi-$ periodisch fortgesetzt.

a) Stellen Sie f graphisch dar (in Einheiten von π, wobei $\pi \widehat{=} 4$ Häuschen).

b) Die Funktion f soll durch ein trigonometrisches Polynom $4-$ $3-$ ten Grades approximiert werden. Bestimmen Sie die zugehörigen Koeffizienten.

c) Können Sie in b) eine Gesetzmässigkeit herauslesen?

Aufgabe 4 *neu*

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Standardbasis (= alte Basis) Σ_e mit den Vektoren e_1, e_2 und e_3 gegeben.
Eine neue Basis Σ_{neu} wird mit $b^{(1)} = 2e_1 + 3e_2$, $b^{(2)} = e_2 + e_3$ und $b^{(3)} = e_3$ gebildet.

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T der Koordinatentransformation

$$\mathcal{T} : \Sigma_{\text{neu}} \longrightarrow \Sigma_e$$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Vektors in der alten Basis, wenn er in der neuen Basis die Koordinaten $(2,\ -3,\ 4)^T$ hat.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Vektors in der neuen Basis, wenn er in der alten Basis die Koordinaten $(2,\ -3,\ 4)^T$ hat.

Aufgabe 5 *neu*

a) Es sei

$$V = \text{span}\left\{1, \cos(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\right\}$$

Bestimmen Sie eine Basis von V. Wie gross ist die Dimension von V ?

b) Der Unterraum U von V bestehe aus allen Funktionen $f \in V$ für die

$$\int_0^\pi f(x)\, dx = 0$$

gilt. Geben Sie eine Basis von U an. Wie gross ist die Dimension von U ?

Aufgabe 6 *neu*

a) Gegeben ist eine $4 \times 4-$ Matrix B mit $\det(B) = 0$. Geben Sie einen Eigenwert von B an.
Wie gross kann der Rang r von B höchstens sein?
Wie gross ist die Dimension des Kerns von B mindestens?

b) Gegeben ist quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2bx_1x_2 + 2x_2^2 + k$$

Um was für eine Kurve handelt es sich bei $Q(x_1, x_2) = 0$ in Abhängigkeit des Parameters b ?

c) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 *neu*

Bezüglich der Standardbasis Σ_e hat die lineare Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $b^{(1)} = (1,\ 1)^T$ und $b^{(2)} = (-1,\ 1)^T$ bilden eine neue Basis Σ_{neu}.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\mathcal{T}\colon \Sigma_{\text{neu}} \longrightarrow \Sigma_e$.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich Σ_{neu}.

c) Der Vektor a hat bezgl. Σ_{neu} die Koordinaten $(3,\ 4)^T$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathcal{F}(a)$ bzgl. Σ_{neu}.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von a bzgl. Σ_e und daraus die Koordinaten von $\mathcal{F}(a)$ bzgl. Σ_e.
Transformieren Sie diese zu den Koordinaten von $\mathcal{F}(a)$ bzgl. Σ_{neu} und kontrollieren Sie Ihr Resultat mit demjenigen aus c).

Aufgabe 8 *neu*

Ein Unterraum U im $\mathbb{R}^3$ wird von

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und ein Unterraum V im $\mathbb{R}^3$ wird von

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$, $\dim(U + V) = ?$

b) Beszimmen Sie einen Basis von $U \cap V$, $\dim(U) = ?$

Aufgabe 9 *neu*

Eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}\colon \mathbb{P}_4 \longrightarrow \mathbb{P}_4$$

ist mit $\mathcal{F}(p) = p' + 2 \cdot p$ gegeben ($' := \frac{d}{dx}$).

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von $\mathcal{F}$ bzgl. der Monome $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

b) Bestimmen Sie den kern von A. Ist A regulär.

c) Kann A diagonalisiert werden? (*mit* Begründung).

Aufgabe 10 *alt*

Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen $\mathcal{F}_k\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1: \quad & \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3) && = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3) \\ \mathcal{F}_2: \quad & \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3) && = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 0) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2$ die Abbildungsmatrizen A_k bzgl. der Standardbasis Σ_e.

b) Bestimmen Sie für A_k aus a) die entsprechenden Kerne, d.h. Kern$(A_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A_k x = 0 \right\}$.
Welche der beiden Abbildungen ist invertierbar?

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Zusammensetzung $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$.
Ist diese neue Abbildung umkehrbar?

Bitte wenden.

Aufgabe 11 *alt*

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_a: \; a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_b: \; b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e: \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ae} von Σ_a nach Σ_e, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_e$ an.

b) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{be} von Σ_b nach Σ_e, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_e$ an.

c) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ab} von Σ_a nach Σ_b, d.h. $\Sigma_a \longrightarrow \Sigma_b$ an.
(Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben ist der Vektor $\vec{q}_a = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_a$ bzgl. Σ_a.
Gesucht ist dieser Vektor bzgl. der anderen Basen Σ_e und Σ_b.

Aufgabe 12 *alt*

a) Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2.
Erzeugen die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x + 2x^2 \\ p_2(x) &= 3 + x \\ p_3(x) &= -x + 4x^2 \\ p_4(x) &= -2 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

den Vektorraum V ?

b) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$:

$$U = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \qquad \text{und} \qquad W = \text{span}\{w_1, w_2\},$$

wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = (1, -2 - 5)^T \quad w_2 = (0, 8, 9)^T.$$

Student ZYX behauptet, dass $U = W$, hat er Recht? (*mit* Begründung).

Aufgabe 13 *alt*

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1 - 6x_2 + k.$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch, welche Werte darf k annehmen.

c) Graphische Darstellung für $k = -9$: Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

MLAN3 Lösungen Schlussprüfung 17.01.11

Lösung 1 *alt*

a) EWP von A:
EW: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$
zugehörige EV:

$$v^{(1)} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v^{(1)} = \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}.$$

also Σ_{neu}:

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1}AT =$diag$(2, 2, 1)$.

b) Nein, da $b^{(3)} \not\perp b^{(1)}$ und $b^{(3)} \not\perp b^{(2)}$.

Lösung 2 *alt*

a) $O_n - U_n = \Delta x(f(b) - f(0)) = \frac{b}{n}(2 + \frac{b^2}{10} - 2) = \frac{b^3}{10n} < \frac{b^2}{1500} \Longrightarrow n > 150b$.

b) $n = 3$: $p_A(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 \cdot \text{Spur}(A) \cdot \lambda^2 + c_1\lambda + \det(A)$, also $\text{Spur}(A) = 2$ und $\det(A) = -5$.
$\frac{1}{2} + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ und $\frac{1}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -5 \Longrightarrow \lambda_2 = -\frac{5}{2}$ und $\lambda_3 = 4$.

ABER!!

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ist so, wie die Aufgabe gestellt ist *kein* Eigenwert. Es sollte

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{8}$$

sein. Damit werden $\lambda_{2.3} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Lösung 3 *alt*

a) $\mathcal{F}_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{F}_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Gauss–Algorithmus, Endschema $A_1 x = 0$:

x_1	x_2	x_3	1
1	.	.	0
.	1	.	0
.	.	1	0

d.h. Kern$(A_1) = \{0\}$

Gauss–Algorithmus, Endschema $A_2 x = 0$:

x_1	x_2	x_3	1
1	-1	.	0
.	2	1	0
.	.	.	.

d.h. Kern$(A_2) =$ span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{F}_1$ ist invertierbar, da A_1 regulär, det$(A_1) \neq 0$

$\mathcal{F}_2$ ist nicht invertierbar, da A_2 singulär, det$(A_2) = 0$

c) $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsmatrix

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}$ ist nicht umkehrbar, da det$(A) = 0$.

Lösung 4 *alt*

a) $T_{ae} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $x_e = T_{ae} \cdot x_a$

b) $T_{be} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mit $x_e = T_{be} \cdot x_b$

c) $x_b = T_{ab} x_a$, $x_a = T_{ae}^{-1} x_e$ und $x_b = T_{be}^{-1} x_e \Longrightarrow T_{be}^{-1} x_e = T_{ab} T_{ae}^{-1} x_e$ und damit $T_{be}^{-1} = T_{ab} T_{ae}^{-1}$, schliesslich $T_{ab} = T_{be}^{-1} T_{ae}$.

$$T_{be}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T_{ab} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

d) $\vec{q}_b = T_{ab} \vec{q}_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}_b$ und $\vec{q}_e = T_{ae} \vec{q}_a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}_e$

Lösung 5 *alt*

a) Basis: $b^{(1)} := 1$, $b^{(2)} := x$ und $b^{(3)} := x^2$, d.h. dim$(\mathbb{P}_2) = 3$

Gauss–Algorithmus, Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	3	0	-2	0
.	4	-1	-4	0
.	.	$\frac{5}{2}$	.	0

Der Rang $r = 3$, d.h. die vier Polynome sind erzeugend.

b) Gauss–Algorithmus, Endschema:

α_1	α_2	α_3	1
1	2	-1	0
.	1	-1	0
.	.	.	.

Rang $r = 2$, d.h. $U =$span$\{u_1, u_2\}$, u_3 ist von u_1 und u_2 linear abhängig, $u_3 = u_1 - u_2$.

$\dim(U) = \dim(W) = 2$
$w_1 = -u_3$ und $w_2 = 2u_1 - u_2 \Longrightarrow U \equiv W$
Student ZYX hat Recht.

Lösung 6 *alt*

$Q(x_1, x_2) = x^T A x + c^T x + k = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = 8 > 0$: es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$

zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu_1 \in \mathbb{R}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$.

Also Σ_{neu}: $b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $T = \left(b^{(1)}, b^{(2)}\right)$, **orthogonal!**

$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = 4x^2_{\text{neu}_1} + 2x^2_{\text{neu}_2} + c^T_{\text{neu}} x_{\text{neu}} + k = 0$ mit $c^T_{\text{neu}} = c^T T = \frac{1}{\sqrt{2}}(8, -20)$,

also (nach quadratischer Ergänzung)

$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = 4\left(x_{\text{neu}_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(x_{\text{neu}_2} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 27 - k,\ k < 27$

$M_{\text{neu}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow M_{\text{alt}}\,(-3, 2)$

c) $k = -9$: , $27 - k = 36$, d.h. $a = 3$ und $b = 3\sqrt{2}$

$$Q(x_{\text{neu}_1}, x_{\text{neu}_2}) = \frac{\left(x_{\text{neu}_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} + \frac{\left(x_{\text{neu}_2} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}{18} = 1$$

Figur.