Klassen WI09b **MLAN3 erster Test** 29. Oktober 2010

Name:

Vektorräume
Unterräume
Lineare Unabhängigkeit, lineare Abhängigkeit
Skalarprodukt
numerische Integration
Referenz–Intervall allgemeines Intervall
Fehlerabschätzung
VR, ein erstes Bsp
komplexe Zahlen

Aufgabe 1 *alt*

Bestimmen Sie mit einer Untersumme U_n approximativ den Wert von

(1) $$I = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{wobei } f(x) = mx + q, m > 0.$$

Das Intervall $[a, b]$ soll dabei in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

- Geben Sie U_n an, Resultat so einfach wie möglich.
- Wohin strebt der Wert von U_n, falls $n \longrightarrow \infty$?
- Wie viele Halbierungen müssen Sie für (1) machen, damit Sie mit der Methode von Simpson eine vorgegebene Toleranz ε einhalten?

Aufgabe 2

alt

a) Gegeben ist der Vektor $u^T = (1,\ -2,\ 5) \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Teilmenge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^T u = 0 \right\}$$

aus $\mathbb{R}^3$.

Behauptung: U ist ein Unterraum in $\mathbb{R}^3$.

Überprüfen Sie diese Behauptung und geben Sie die Vektoren an, die U aufspannen. Wie gross ist die Dimension von U? Geometrische Interpretation von U

a) Die Menge aller komlexen Zahlen z für die gilt: Re$(z) = 2\cdot$ Im(z) , bilden in $\mathbb{C}$ einen Unterraum U.

Überprüfen Sie diese Behauptung, d.h.

- $a \in U$, $b \in U \overset{?}{\Longrightarrow} a + b \in U$
- $a \in U$, $\mu \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \mu a \in U$

und stellen Sie U graphisch dar, wie gross ist dim(U) ?

a) $z^6 + j = 0$, alle Lösungen, z_0 in kartesischer Form

Graphische Darstellung der Lösungen, Einheiten auf beiden Achsen je 8 Häuschen.

b) $|z - 5| \geq |z - z_1^\star|$, wobei $z_1 = 1 - j$,

Graphische Darstellung der Lösungsmenge dieser Ungleichung, Einheiten auf beiden Achsen je 2 Häuschen.

b) $z = 1 + w^2$, wobei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$.

Für welche Argumente von w ist $\text{Re}(z) = 0$, *alle* Lösungen.

Tipp: w in Polarform.

Aufgabe 3 *Vergleich des Aufwands*

Es soll das Integral

$$I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$$

mit sieben korrekt gerundeten Dezimalen numerisch bestimmt werden. Das Intervall $[0, 2]$ soll dabei in gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

- Wie gross muss die Toleranz ε sein?
- Wieviele Teilintervalle sind für die Trapezmethode notwendig?
- Wieviele Teilintervalle sind für die Methode von Simpson notwendig?
- Verhältnis der beiden Anzahlen

Aufgabe 4 *alt*

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -h,\ h,\ 3h. \tag{2}$$

im Intervall $[-h, 3h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (2), um

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ und $f(x) = \cos(x)$.

Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

WI09b MLAN3 Lösungen erster Test 29.10.10

Lösung 1 *neu?? Vergleich Aufwand*

- $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$
- $\frac{(b-a)}{12}(\Delta x)^2 M_2 < \varepsilon \Longrightarrow n_{\text{Trapez}} > 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\sqrt{30}}$, wobei $M_2 = 1$
- $\frac{(b-a)}{180}(\Delta x)^4 M_4 < \varepsilon \Longrightarrow n_{\text{Simpson}} > \frac{2 \cdot 10^2}{\sqrt[4]{450}}$, wobei $M_4 = 1$

Lösung 2 *Untersumme*

Lösung 3 *neu?? $\mathbb{C}$, Unterraum*

a)

a) $a \in U$ und $b \in U$: $a = \alpha(2+j), \alpha \in \mathbb{R}$ und $b = \beta(2+j), \beta \in \mathbb{R}$.

- $c = a + b = (\alpha + \beta)(2+j) = \gamma(2+j)$, wobei $\gamma = \alpha + \beta \Longrightarrow a + b \in U$
- $c = \mu a = \mu\alpha(2+j) = \gamma(2+j)$, wobei $\gamma = \mu\alpha \Longrightarrow \mu a \in U$

Grafik: Gerade durch den Ursprung mit Steigung $m = \frac{1}{2}$, $\dim(U) = 1$,

Parameterdarstellung von g: $\vec{r} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$.

b)

Lösung 4 *Quadratur mit Transformation*

Aufgabe 5 *neu*

Gegeben ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx \tag{3}$$

I soll numerisch mit einer Obersumme bestimmt werden. Dabei soll das Intervall $[-1,\, 1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

a) Wie gross muss n mindesten sein, um I mit einem absoluten Fehler kleiner $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen?

b) Student X ist a) zu aufwendig. Er will (3) mit der Trapez–Methode numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

d) Student Z ist auch b) zu aufwendig. Er will (3) mit der Methode von Simpson numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

Aufgabe 6 *alt*

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

a) Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A?

b) $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \middle|\ Ax = 0 \right\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U?

Aufgabe 7 *alt*

a) Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx. \tag{4}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (4).

b) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ ($=$ Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\left\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\right\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U, dim(U) =?

Aufgabe 8 *alt*

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.
Sei $U = \left\{ A \in V \middle|\ A^T = -A \right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung 5

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1,\, 2,\, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e} \right)$

Lösung 6

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 7

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\, \{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\, \{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x) \right\} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 8

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A + B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 9

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 10

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 11

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 12

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2