Klasse WI09b **MLAN3 zweiter Test** 10. Dezember 2010

Name:

Aufgabe 1

Lineare Abbildungen:
Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}_1 : R^3 \longrightarrow R^3 \qquad \text{durch} \qquad F_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3\right)$$

sowie eine zweite Abbildung

$$\mathcal{F}_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 0\right)$$

a) Ist F_2 linear?

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ bzgl. der Standardbasis Σ_e.

c) Ist die Abbildungsmatrix A aus b) regulär? (*mit* Begründung).

Aufgabe 2

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.

Sei $U = \left\{ A \in V \middle| \, A^T = -A \right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?

Falls ja, wie gross ist die Dimension von U? Geben Sie eine Basis von U an.

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine orthonormierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$;
$f(x)$ wird auf der ganzen reellen Achse $2\pi-$ periodisch fortgesetzt.

a) Graphische Darstellung von $y = f(x)$, Einheiten auf beiden Achsen: $\pi \hat{=} 4$ Häuschen.

b) Approximieren Sie f auf $[-\pi, \pi]$ durch ein trigonometrisches Polynom dritten Grades.

c) Stellen Sie in b) eine Gesetzmässigkeit fest?

WI09b MLAN3 Lösungen zweiter Test 10.12.10

Lösung 1

a) Seien $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus dem R^3.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right) &= ((x_{11}+x_{12}) - (x_{21}+x_{22}), 2(x_{11}+x_{12}) + (x_{31}+x_{32}), 0)) \\ &= ((x_{11}-x_{21}) + (x_{12}-x_{22}), (2x_{11}+x_{31}) + (2x_{12}+x_{32}), 0) \\ &= (x_{11}-x_{21}, 2x_{11}+x_{31}, 0) + (x_{12}-x_{22}, 2x_{12}+x_{32}, 0) \\ &= \mathcal{F}_2\left(x^{(1)}\right) + \mathcal{F}_2\left(x^{(2)}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}^3$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha x) &= (\alpha x_1 - \alpha x_2, 2(\alpha x_1) + \alpha x_3, 0) \\ &= \alpha\,(x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 0) \\ &= \alpha \mathcal{F}_2(x). \end{aligned}$$

$\square$

D.h. $\mathcal{F}_2$ ist linear.

b)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A_1) \neq 0$, $\det(A_2) = 0$ (da die dritte Zeile eine Nullzeile), also ist A singulär. A hat Rang $r = 2$.

Lösung 2

a) Seien A_1 und A_2 aus U, d.h. $A_1^T = -A_1$ und $A_2^T = -A_2$, dann gilt:

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = -A_1 - A_2 = -(A_1 + A_2) \quad \Longrightarrow A_1 + A_2 \in U$$

Sei $A \in U$, d.h. $A^T = -A$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -(\alpha A) \quad \Longrightarrow \quad (\alpha A) \in U$$

D.h. U ist ein Unterraum von V und $\dim(U) = 3$.

$A^T = -A \Longrightarrow$ Diagonalelemente müssen Null sein!

Weiter muss $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$ und $a_{32} = -a_{23}$ erfüllt sein, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Basis von U:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

a) Grafik, die Kurve $y = f(x)$ ist symmetrisch zur $y-$ Achse, d.h. f ist gerade.

b)

$$trig_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} [a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)]$$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\, dx = \pi$

$a_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} x \cdot \cos(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{1^2}\right)$

$a_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} x \cdot \cos(2x)\, dx = 0$

$a_3 = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} x \cdot \cos(3x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3^2}\right)$

$b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(x)\, dx = 0 = b_2 = b_3,$

da $f(x) \cdot \sin(kx)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ eine ungerade Funktion ist.

Schliesslich $trig_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left\{\frac{1}{1^2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x)\right\}$

c)
- $b_k = 0$, für alle $k \in \mathbb{N}$, da $f(x) \cdot \sin(kx)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ eine ungerade Funktion ist.
- $a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \ldots,$
- also: falls $k =$ gerade: $a_k = 0$
  falls $k =$ ungerade: $a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{k^2}\right)$

d.h. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \cos((2k+1) \cdot x)$

Dies ist die Fourier-Reihe der gegebenen Funktion.