Klassen SI09a, UI09b **MNM – Schlussprüfung** 22. Juni 2011

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

(1) $$Ax = b$$

mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von (1).

Aufgabe 2

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-8} \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_\infty -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ b2) $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$.
Vergleich mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung, was stellen Sie fest?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gleichung

(2) $$x^2 + 3x - 4 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (2).

b) (2) wird nun mit der gewöhnlichen Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Nullstelle s_1 von (2) ein attraktiver Fixpunkt der Iteration sein. Startwert $x_0 = 2$.

Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte x_1, x_2 und bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.

Wie gross ist q wirklich?

c) Berechnen Sie zusätzlich x_3 sowie die Werte x'_0 und x'_1 nach dem *Aitken'schen* Δ^2- Verfahren.

Bestimmen Sie damit den Näherungswert

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{x'_1 - s_1}{x'_0 - s_1} \right|.$$

bitte wenden

Aufgabe 4

a) Gegeben ist die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Wie gross muss u sein, damit $Ux = 0$ nicht–triviale Lösungen hat.

b)

(3) $$H(q) = \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - 1000} \qquad q > 10\sqrt{10}.$$

Falls $q \longrightarrow \infty$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (3) Auslöschung.

b1) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (3), d.h. $\lim\limits_{q\to\infty} \kappa_H(q)$.

b2) Können Sie die Auslöschung in (3) vermeiden? (*mit* Begründung)
Wenn ja, wie?

Aufgabe 5

Gegeben ist das Integral

(4) $$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

(4) soll mit der Trapezmethode numerisch bestimmt werden.

a) In der Theorie wurde das Referenzintervall $[0, h]$ mit $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = h$ mit den Gewichten $w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$ verwendet.

Wenden Sie diese Quadratur auf (4) an.

b) Wieder für das Referenzintervall $[0, h]$ wird jetzt neu eine Quadratur mit $\xi_0 = \frac{h}{3}$ und $\xi_1 = \frac{2h}{3}$ betrachtet.
Bestimmen Sie w_0 und w_1 und wenden Sie diese Quadratur auf (4) an.

c) Vergleichen Sie die beiden Werte aus a) und b) mit dem exakten Wert. Welcher der beiden Werte ist besser?

Aufgabe 6

a) Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{2} + c \qquad |c| \leq \frac{3\pi}{4}$$

Für welche c hat die Gleichung keine, eine, zwei oder drei Lösungen?

Graphische Darstellung mit den Einheiten $1 \hat{=} 4$ Häuschen, $\pi \hat{=} 12$ Häuschen.

b) Um die Gleichung $f(x) = 0$ mit einem Iterationsverfahren numerisch zu lösen, kann sie wie folgt geschrieben werden:

(5) $$x = \underbrace{x + g(x) \cdot f(x)}_{=:F(x)}$$

Wie müssen Sie $g(x)$ in (5) wählen, damit die Iteration quadratisch konvergiert?

Viel Erfolg!

MNM Lösungen Schlussprüfung 22.06.11

Lösung 1

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	1	0	3	10	6
0	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	0	$\frac{1}{3}$	2	2

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung 2

Kondition eines Gleichungssystems

a) $A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 1+10^{-8} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10^8 & -10^8 \\ -10^8 & 10^8 \end{pmatrix}$, also
$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k$ für $k = 1, 2$

b1) $\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ und b2) $\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$

c) $\Delta\hat{x}_k = \hat{x}_k - x_e$ für $k = 1, 2$

b1) $\Delta\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_1\|_\infty}{\|x_e\|_\infty} = \varepsilon 10^8$

und b2) $\Delta\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_2\|_\infty}{\|x_e\|_\infty} = \varepsilon(1+10^8)$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}\|_\infty = \kappa(A)\left\|\delta\hat{b}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8\varepsilon$

für b1) *und* für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, d.h. das Problem ist *wirklich* schlecht konditioniert. Diese Schranke wäre nur dann nicht realistisch, falls in beiden Komponenten gleichzeitig und genau gleich gestört würde.

Lösung 3

Beschleunigung nach Aitken

a) Die Lösungen von (2) sind $s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.

b) Fixpunktiteration: $x = F(x)$

$$x = F_1(x) = \sqrt{4-3x} \qquad \text{oder} \qquad x = F_2(x) = \frac{1}{3}(4-x^2)$$

$$|F_1'(s_1)| = \frac{3}{2} > 1 \qquad |F_2'(s_1)| = \frac{2}{3} < 1$$

d.h. $s_1 = 1$ ist für F_2 ein attraktiver Fixpunkt.

$x_0 = 2$, $x_1 = F_2(x_0) = 0$, $x_2 = F_2(x_1) = \frac{4}{3}$ und $x_3 = F_2(x_2) = \frac{20}{27}$

$q \approx \frac{8}{9} < 1!$ Tatsächlich ist $q = \frac{2}{3} = |F_2'(s_1)|$

c)

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{(x_2 - 2x_1 + x_0)} = \frac{4}{5} \qquad x_1' = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_3 - 2x_2 + x_1)} = \frac{12}{13}$$

und damit

$$q_{\text{Aitken}} \approx \frac{5}{13}$$

Lösung 4

a) $\text{Det}(U) = 10 - 2u \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow u = 5$, (Enwicklung nach der 2-ten oder 4-ten Spalte).

b) b1)

$$H'(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2 - 1}} - \frac{q}{\sqrt{q^2 - 1000}} \Longrightarrow \kappa_H(q) = \left| \frac{q \cdot H'(q)}{H(q)} \right| = \frac{q^2}{\sqrt{q^2 - 1} \cdot \sqrt{q^2 - 1000}}$$

$$\lim_{q \longrightarrow \infty} \kappa_H(q) = \left| \frac{q^2}{q\sqrt{1 - \frac{1}{q^2}} \cdot q\sqrt{1 - \frac{1000}{q^2}}} \right| = 1$$

b2) Da die Kondition in a) sehr gut ist, kann die Auslöschung vermieden werden, durch Erweiterung von $H(q)$ mit der Summe der beiden Wurzeln:

$$H(q) = \frac{999}{\sqrt{q^2 - 1} + \sqrt{q^2 - 1000}}$$

Lösung 5

Quadraturformel, Trapezmethode
$[0, h] \longrightarrow [1, 2]$ mit $x = x(\xi) = \frac{1}{h} \cdot \xi + 1$, $0 \leq \xi \leq h$
und damit

$$I = \int_1^2 f(x)\, dx = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h f\left(\frac{1}{h} \cdot \xi + 1\right) d\xi \tag{6}$$

a) Mit (6) erhalten wir

$$I \approx Q_1 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

b) Bestimmung der Gewichte:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} w_0 & + & w_1 & = & h \\ w_0 \cdot \frac{h}{3} & + & w_1 \cdot \frac{2h}{3} & = & \frac{h^2}{2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$$

Mit (6) erhalten wir jetzt

$$I \approx Q_2 = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{27}{40}$$

c) $Q_1 = 0.75$, keine Dezimale ist richtig.

$Q_2 = 0.675$ bereits die erste Dezimale ist richtig, d.h. mit Q_2 erhalten wir eine bessere Approximation

$$|I - Q_2| < |I - Q_1|.$$

Lösung 6

nicht–lineare Gleichung

a) Ableitung der linken Seite: $\cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}$, d.h. in den beiden Kurvenpunkten $P_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_2\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ist die Tangente an $y = \sin(x)$ parallel zur Geraden $y = \frac{x}{2} + c$

- keine Lösung: nicht möglich
- eine Lösung:

$$-\frac{3\pi}{4} < c < -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} < c < \frac{3\pi}{4}$$

- zwei Lösungen:

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

- drei Lösungen:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < c < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

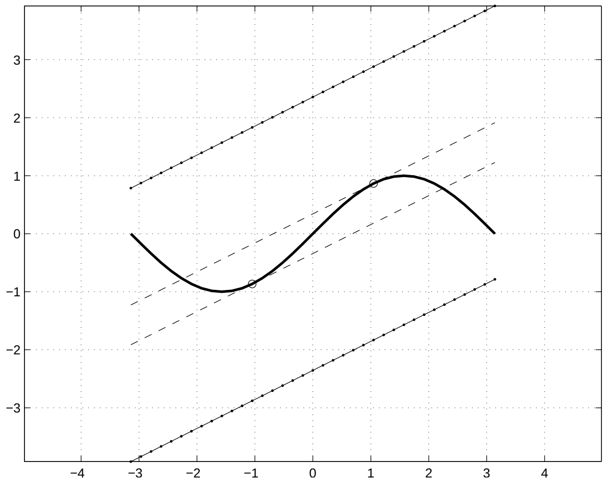

Abbildung 1: Graphische Dartsellung von linker und rechter Seite der nicht–linearen Gleichung.

b) $s =$ NS von f, d.h. $f(s) = 0$ bzw. $s =$Fixpunkt der Iteration, d.h. $s = F(s)$.
$F(x) = x + g(x) \cdot f(x)$, $F'(x) = 1 + g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$
quadratische Konvergenz: $F'(s) = 0 \stackrel{!}{=} 1 + g'(s) \cdot f(s) + g(s) \cdot f'(s)$, da $f(s) = 0$ folgt sofort:
$F'(s) = 0 = 1 + g(s) \cdot f'(s) \Longrightarrow g'(s) = -\frac{1}{f'(s)}$ und daraus: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$
Für diese Wahl von $g(x)$ erhalten wir das Verfahren von Newton!