Klasse ME09b **MND2 Schlussprüfung** 28. Juni 2011

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 0.4 \cdot \dot{y} + 16.04 \cdot y = 0 \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix, sowie die Steifheit des Systems.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems in a) an.

c) Das System in a) soll mit einem expliziten RK, $p = 3$ mit $4-$ stelliger Genauigkeit numerisch gelöst werden.
Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende $4-$ stufige explizite Runge–Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array} \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion von (2) mit Hilfe von $y' = \lambda \cdot y$, AB $y(0) = 1$.

b) Bestimmen Sie die Ordnung p von (2).

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{y} = t \cdot y \qquad \text{mit der AB } y(0) = 1. \tag{3}$$

a) Lösen Sie (3) mit Hilfe einer Potenzreihe. Können Sie eine Gesetzmässigkeit der Koeffizienten angeben?

b) Die Lösung von (3) soll nun mit der Methode der Taylorreihe numerisch approximiert werden. Der globale Fehler soll dabei von der Ordnung $p = 5$ sein. Formulieren Sie den allgemeinen Schritt von t_k nach $t := t_k + h$ und geben Sie die entsprechenden Koeffizienten rekursiv an.

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

(4) $\ddot{y} + 201\dot{y} + c \cdot y = 80 \cdot \cos(t) + 156.25$ mit den AB: $y(0) = \alpha,\ \dot{y}(0) = \beta,\ c \in \mathbb{R}$.

a) Schreiben Sie (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie c so, dass $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert der System–Matrix in a) ist.

c) Bestimmen Sie die Steifheit des Systems in a).

d) Das System in a) soll mit "Euler explizit" numerisch gelöst werden. Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das Verfahren stabil ist?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

(5) $y^{(4)} + y = g(x)$ mit den AB $y(0) = \alpha_0,\ y'(0) = \alpha_1,\ y''(0) = \alpha_2,\ y'''(0) = \alpha_3$.

a) Schreiben Sie (5) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung des Systems in a) soll nun numerisch mit den Methoden "Euler explizit" und "Euler implizit" bestimmt werden.
Formulieren Sie für beide Methoden je den allgemeinen Schritt, aufgelöst nach der zu berechnenden Grösse, (für eine gegebene Schrittweite $h > 0$).

c) Könnten Sie das System in a) durch Entkopplung lösen? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

(6) $\dot{y} = t \cdot e^{3t} - 2y \qquad 0 \le t \le 1,$ mit der AB $y(0) = y_0 = 0$.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (6). Die partikuläre Lösung $y_p(t)$ ist mit Variation der Konstanten zu bestimmen.

b) Die Lösung von (6) soll nun numerisch mit der Trapezmethode und Schrittweite $h = 0.2$ approximiert werden.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie anschliessend den ersten Schritte aus.

c) Geben Sie den globalen Fehler für $t = 0.2$ an.

Viel Erfolg!

ME09b MND2 Lösungen Schlussprüfung 28.06.11

Lösung 1

a) Substitution: $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16.04 & -0.4 \end{pmatrix}$.

Weiter gilt: $J = A$, da es sich um ein lineares Problem handelt. EW von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 0.4\lambda + 16.04 \stackrel{!}{=} 0$, also $\lambda_{1.2} = -0.2 \pm j \cdot 4 \Longrightarrow S(t) = 1 =$ konstant.

b)

$$x_h(t) = 2 \cdot e^{\alpha_1 t} \left\{ (a_1 \cos(\beta_1 t) - b_1 \sin(\beta_1 t)) \cdot u^{(1)} - (a_1 \sin(\beta_1 t) + b_1 \cos(\beta_1 t)) \cdot w^{(1)} \right\} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $\alpha_1 = -0.2$, $\beta_1 = 4$ und der EV $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = u^{(1)} + j \cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Toleranz $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$. Hier muss nur der Realteil Re$(\lambda_1) = \alpha_1 = -0.2$ berücksichtigt werden:

$$\left| \frac{(h \cdot \alpha_1)^4}{4!} \right| < 5 \cdot 10^{-5} \quad \Longrightarrow h^4 < \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow h_1 < \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 0.9306$$

$$e^{-0.2t} < 5 \cdot 10^{-5} \quad \Longrightarrow t_1 = \frac{\ln(5 \cdot 10^{-5})}{-0.2} = 49.5174$$

Mit h_1 werden bereits $n_1 \geq \frac{t_1}{h_1} = 53.2099$, also $n_1 = 54$ Schritte gemacht.

Lösung 2

Stabilitätsfunktion
Ordnung p eines expliziten RK-Verfahrens

a) Stabilitätsfunktion $R(h\lambda)$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_k \\
k_2 &= \lambda \left(y_k + \frac{h}{2} k_1 \right) = \lambda y_k + \frac{h}{2} \lambda^2 y_k \\
k_3 &= \lambda (y_k + h k_2) = \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + \frac{h^2}{2} \lambda^3 y_k \\
k_4 &= \lambda (y_k + h k_3) = \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + h^2 \lambda^3 y_k + \frac{h^3}{2} \lambda^4 y_k
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} \{k_1 + 4k_2 + k_4\} \\
&= y_k + \frac{h}{6} \left\{ \lambda y_k + 4 \left(\lambda y_+ \frac{h}{2} \lambda^2 y_k \right) + \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + h^2 \lambda^3 y_k + \frac{h^3}{2} \lambda^4 y_k \right\} \\
&= y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2!} y_k + \frac{(h\lambda)^3}{3!} y_k + \frac{(h\lambda)^4}{12} y_k \\
&= R(h\lambda) \cdot y_k
\end{aligned}$$

und schliesslich:

$$R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{12} \qquad (7)$$

b) In (7) ist der letzte Nenner "falsch", statt $4!$ haben wir nur die Hälfte davon, d.h. das Verfahren hat nur die Ordnung $p = 3$, obwohl es $4-$ stufig ist!

Lösung 3

a) Lösung mit Hilfe einer Potenzreihe:

$$(8) \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \qquad \dot{y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k t^{k-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 t + 3 \cdot a_3 t^2 + \ldots$$

mit der AB erhalten wir $y(0) = a_0 = 1$.

(8) in (3) einsetzen und Koeffizientenvergleich bzgl. Potenzen in t liefert:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= a_1 + 2 \cdot a_2 t + 3 \cdot a_3 t^2 + \ldots \\ &= t \cdot \big(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \ldots\big) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} t^0: & a_1 = 0 & \\ t^1: & 2a_2 = a_0 \overset{\text{AB}}{=} 1 & a_2 = \frac{1}{2} \\ t^2: & 3a_3 = a_1 & a_3 = 0 \\ t^3: & 4a_4 = a_2 & a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} \\ t^4: & 5a_5 = a_3 & a_5 = 0 \\ t^5: & 6a_6 = a_4 & a_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

allgemein:

$$a_{2k+1} = 0 \qquad a_{2k} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

und damit

$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{t^4}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{t^6}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{t^8}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!} = e^{\frac{t^2}{2}}, \ t \geq 0.$$

b) $t = t_k + h$, $h = t - t_k$:

allgemeiner Schritt von y_k nach $y_{k+1} \approx y(t) = y(t_k + h)$, also

$$\begin{aligned} &(9) & y(t) &= y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots \\ &(10) & \dot{y}(t) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + \ldots \end{aligned}$$

(9) und (10) in (3) einsetzen und anschliessend Koeffizientenvergleich in Bezug auf die Potenzen in h:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + \ldots \\ &= (t_k + h) \cdot (y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots) \end{aligned}$$

Da hier Ordnung $p = 5$ muss bis und mit c_5 entwickelt werden, dann ist $d_{k+1} = O(h^6)$:

$$\begin{array}{rccl}
h^0: & c_1 = t_k y_k & \text{expliziter Euler} \\
h^1: & 2c_2 = y_k + t_k c_1 & c_2 = \frac{1}{2} \cdot (y_k + t_k c_1) \\
h^2: & 3c_3 = c_1 + t_k c_2 & c_3 = \frac{1}{3} \cdot (c_1 + t_k c_2) \\
h^3: & 4c_3 = c_2 + t_k c_3 & c_4 = \frac{1}{4} \cdot (c_2 + t_k c_3) \\
h^4: & 5c_5 = c_3 + t_k c_4 & c_5 = \frac{1}{5} \cdot (c_3 + t_k c_4) \\
\dots & \dots & \dots \\
h^{p-1}: & pc_p = c_{p-2} + t_k c_{p-1} & c_p = \frac{1}{p} \cdot (c_{p-2} + t_k c_{p-1})
\end{array}$$

und damit erhalten wir

$$y_{k+1} = y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lösung 4

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -201 \end{pmatrix}$, $z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ und $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \cdot \cos(t) + 156.25 \end{pmatrix}$.

b) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 201\lambda + c \stackrel{!}{=} 0$,
Satz von Vïeta: Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -201 \Longrightarrow \lambda_2 = -200$ und det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = c$, also $c = 200$.

c) $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -200$, also $S(t) = S = 200 =$ konstant, da die gegebene Differentialgleichung linear ist.

d) Euler explizit: $z^{(k+1)} = z^{(k)} + h \cdot f(t_k, z^{(k)})$, also

$$\begin{aligned}
z^{(0)} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
z^{(k+1)} &= (I_2 + hA) \cdot z^{(k)} + h \cdot g(t_k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Stabilitätsbedingung für $\lambda < 0$: $-2 < h\lambda < 0 \Longrightarrow \frac{-2}{\lambda} > h > 0$, d.h. $0 < h < 0.01$

Lösung 5

a)

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= y' \\ z_3 &= y'' \\ z_4 &= y''' \end{aligned} \quad z' = A \cdot z + g_4(x)\ ,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \ z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

b) mit $f(x,z) := A\cdot z + g_4(x)$ erhalten wir:

"Euler explizit":

$$z^{(k+1)} = (I_4 + h\cdot A)\cdot z^{(k)} + h\cdot g_4(x_k) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

"Euler implizit":

$$z^{(k+1)} = (I_4 - h\cdot A)^{-1}\cdot\left\{z^{(k)} + h\cdot g_4(x_{k+1})\right\} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

c) EW von A:

$p_A(\lambda) = \lambda^4 + 1 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_k = e^{j\varphi_k}$, wobei $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$.

($4-$ te Wurzel aus $(-1) = e^{j(\pi+k2\pi)}$, daher alle EW komplex; zwei konjugiert komplexe Paare)

d.h.

- wir haben vier verschiedene EW mit je der algVF$(\lambda_k) = 1$ und
- da $1 \leq$ geomVF$(\lambda_k) \leq$ algVF$(\lambda_k) = 1$ gilt, folgt sofort geomVF$(\lambda_k) =$ algVF$(\lambda_k) = 1$, $k = 1,2,3,4$,
- d.h. A ist einfach und daher diagonalisierbar.

Die Lösung ist durch Entkopplung möglich.

Lösung 6

a) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, wobei $y_h(t) = c\cdot e^{-2t}$

Ansatz für $y_p(t) = c(t)\cdot e^{-2t}$

$\dot{y}_p(t) = \dot{c}(t)\cdot e^{-2t} - 2c(t)\cdot e^{-2t} \overset{!}{=} t\cdot e^{3t} - 2c(t)\cdot e^{-2t} \Longrightarrow \dot{c}(t) = t\cdot e^{5t} \Longrightarrow c(t) = \frac{e^{5t}}{5}\left(t - \frac{1}{5}\right)$

und damit $y_p(t) = \frac{e^{3t}}{5}\left(t-\frac{1}{5}\right)$, also $y_a(t) = c\cdot e^{-2t} + \frac{e^{3t}}{5}\left(t - \frac{1}{5}\right)$, $c\in\mathbb{R}$.

Mit der AB erhalten wir $c = \frac{1}{25}$ und damit

$$y(t) = \frac{1}{25}\cdot e^{-2t} + \frac{e^{3t}}{5}\left(t - \frac{1}{5}\right), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

b) mit $f(t,y) = t\cdot e^{3t} - 2y$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\cdot\{f(t_k,y_k) + f(t_{k+1},y_{k+1})\}\\
&= y_k + \frac{h}{2}\cdot\left\{t_k\cdot e^{3t_k} - 2y_k + t_{k+1}\cdot e^{3t_{k+1}} - 2y_{k+1}\right\}\\
y_{k+1} &= \left(\frac{1-h}{1+h}\right)\cdot y_k + \frac{h}{2(1+h)}\cdot\left\{t_k\cdot e^{3t_k} + t_{k+1}\cdot e^{3t_{k+1}}\right\} \quad k = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}$$

c) mit $y_0 = t_0 = 0$ und $t_1 = h$ erhalten wir

$$y_1 = \frac{h}{2(1+h)}\cdot t_1\cdot e^{3t_1} = \frac{0.2}{2(1.2)}\cdot 0.2\cdot e^{0.6} = \frac{1}{60}\cdot e^{0.6}$$

$$y(0.2) = \frac{1}{25}\cdot e^{-0.4} \qquad \Longrightarrow \qquad g_1 = \left|\frac{1}{60}\cdot e^{0.6} - \frac{1}{25}\cdot e^{-0.4}\right| = 0.0036$$