Klasse ME09b **MND2 erster Test** 30. März 2011

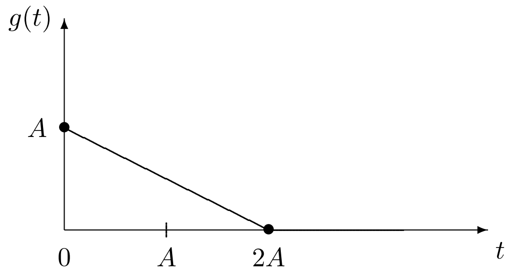
Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

(1) $$\dot{y} + y = g(t) \qquad \text{mit der AB } y(0) = 0.$$

mit der Anregung $g(t)$, siehe Figur.



Gesucht ist die *stetige* Lösung von (1) für $t \geq 0$,

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

(2) $$y'' + 2y' - 3y = 2x - 4 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Formulieren Sie für das System in a) die Methode von Euler (allgemeiner Schritt).

c) Führen Sie die ersten beiden Schritte mit der Schrittweite $h = 0.1$ aus.

Aufgabe 3

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(3) $$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie (3) durch Entkopplung.

b) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.

c) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.

d) Geben Sie den stabilen bzw. den instabilen Unterraum an.

ME09b MND2 Lösungen erster Test 30.03.11

Lösung 1

$$g(t) = \begin{cases} A - \frac{t}{2}\,, & \text{falls} \quad 0 \le t \le 2A \\ 0\,, & \text{falls} \quad 2A \le t \end{cases}$$

- erster Teil der Lösung: $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, wobei $y_h(t) = c \cdot e^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$.
  Ansatz: $y_p(t) = a_0 + a_1 t$, gemäss Tabelle, Papula, da die Anregung linear.
  Koeffizientenvergleich liefert: $y_p(t) = \left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{t}{2}$ und damit

$$y_a(t) = c \cdot e^{-t} + \left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{t}{2}\,, \qquad 0 \le t \le 2A.$$

  AB: $c = -\left(A + \frac{1}{2}\right)$ und schliesslich:

$$y(t) = -\left(A + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-t} + \left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{t}{2}\,, \quad 0 \le t \le 2A.$$

- zweiter Teil der Lösung: $y_h(t) = c \cdot e^{-t}$, $2A \le t$, da die Dgl homogen.
  neue AB für $t = 2A$: $y(2A) = -\left(A + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2A} + \frac{1}{2}$
  $\Longrightarrow c = -\left(A + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot e^{2A}$ und damit

$$y(t) = \left(-\left(A + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot e^{2A}\right) \cdot e^{-t}\,, \qquad 2A \le t.$$

Lösung 2

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = y' \Longrightarrow z' = Az + g(x)$,
   wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 4 \end{pmatrix}$, $x \ge 0$
   AB: $z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Methode von Euler:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + h \cdot f\left(x_k, z^{(k)}\right) = z^{(k)} + h \cdot \left\{Az^{(k)} + g(x_k)\right\} \qquad z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

c)

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \qquad z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.16 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

a) EWP von A:

$$x_h(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) in Σ_{neu}:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_{\mathsf{neu}_1} & = & -2 \cdot x_{\mathsf{neu}_1} \\ \dot{x}_{\mathsf{neu}_2} & = & \frac{1}{2} \cdot x_{\mathsf{neu}_2} \end{array} \right. \qquad x_{\mathsf{neu}_1}(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \qquad x_{\mathsf{neu}_2}(t) = c_2 \cdot e^{\frac{1}{2}t}$$

Elimination von t: $x_{\mathsf{neu}_1} \cdot x_{\mathsf{neu}_2}^4 = c_1 \cdot c_2^4$

$$\Longrightarrow \qquad x_{\mathsf{neu}_1} = c_1 c_2^4 \cdot \frac{1}{x_{\mathsf{neu}_2}^4}\,, \quad \text{graphische Darstellung}$$

c) in Σ_e: die Figur in b) wird um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht, da $T = D_\varphi$

d) stabiler UR: $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und instabiler UR: $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung 4 *alt*

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $g_{\text{neu}}(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $z_{\text{neu}_p}(t) = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

und damit $z_p(t) = T z_{\text{neu}_p}(t) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$z_a(t) = z_h(t) + z_p(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = \frac{1}{6}\left(2\alpha + \beta + \frac{1}{4}\right)$ und $c_2 = \frac{1}{6}\left(4\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)$:
$c_1 = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha + \beta + \frac{1}{4} = 0$.

Lösung 5 *alt*

a) Mit dem vorgeschlagenen Verfahren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad k_1 &= \lambda y_k \\
(5) \qquad k_2 &= \lambda(y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1) = \lambda y_k + \frac{h}{3}\lambda^2 y_k \\
(6) \qquad y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4} \cdot \{2k_1 + k_2\} = \left(1 + \frac{3h}{4}\lambda + \frac{h^2}{12}\lambda^2\right) y_k
\end{aligned}$$

Euler: $y_{k+1} = (1 + h\lambda) y_k$.
Mit (6) folgt, dass (**??**) schlechter ist als die Methode von Euler!
(**??**) sollte nicht verwendet werden!

b) Aus der Theorie:

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= h\, f\ \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F \left\{\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3\right\} \\
&\quad + h^3 \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2 c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2 c_3]\right\} + O(h^4)
\end{aligned}$$

Zweistufiges Verfahren: $a_3 = c_3 = 0$:
Also sollten die beiden folgenden Gleichungen

$$1 = c_2 + c_2 \qquad \frac{1}{2} = a_2 c_2$$

gelten und damit $c_2 = \frac{3}{2}$ und $c_1 = -\frac{1}{2}$. Auf diese Weise hätte (**??**) die Fehlerordnung $p = 2$.

Lösung 6 *alt*

a) $A = A^T$, d.h. A ist diagonalisierbar.

$$x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2}\cdot A\right)^{-1}\cdot\left(I_2 + \frac{h}{2}\cdot A\right)x_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \frac{1}{0.32}\begin{pmatrix} 0.88 & 0.4 \\ 0.4 & 0.88 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.32}\begin{pmatrix} 2.16 \\ 1.68 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$, Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -2$, det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

oder $\hat{T} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & w^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\hat{D} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ und schliesslich $A = \hat{T}\cdot\hat{D}\cdot\hat{T}^{-1}$

Da $v^1 = u^{(1)} + j\cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ *muss* die erste Zeile von

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$ "Null Eins" sein!

Lösung 7

a) $y' = k \Longrightarrow y(x) = -x(2k+1) - k$

Die Isoklinen sind Geraden mit der Steigung $m = -(2k+1)$ und dem $y-$ Achsenabschnitt $q = -k$.

b) $y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y_H(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$. Mit der AB folgt: $C = 5$, also $y(x) = \sqrt{5 - x^2}$

Dgl. der orthogonalen Trajektorien: $y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow y_H(x) = Cx$, mit der AB folgt $C = 1$ und damit für die orthogonale Trajektorie: $y = x$.

Grafik

Lösung 8

a) Ableiten und einsetzen.

$$y'(x) = \frac{C \cdot 75 \cdot e^{-15x}}{(1 + C \cdot e^{-15x})^2}$$

b) $y_0 = \frac{5}{2}$

Lösung 9

- erster Schritt: Separation der Variablen

  $y_H(x) = C \cdot \cos(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

- zweiter Schritt: Variation der Konstanten

  $y_P(x) = C(x) \cdot \cos(x)$, einsetzen $\Longrightarrow C(x) = \tan(x)$

- dritter Schritt: allgemeine Lösung

  $y_A(x) = y_H(x) + y_P(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

  Bestimmung von C mit der AB: $C = -1$, also $y(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.