Klasse ME09b | **MND2 zweiter Test** | 11. Mai 2011

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \frac{1}{4}\,\dot{x} + x = 0 \qquad x(0) = \alpha \qquad \dot{x}(0) = \beta \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung von a) soll numerisch approximiert werden. Führen Sie einen Schritt mit dem Verfahren von Heun der Ordnung $p = 2$ von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

c) Approximieren Sie die Lösung aus a) mit der Methode "verbesserter Polygonzug", (Schrittweite $h > 0$). Führen Sie den ersten Schritt aus.

Vergleich von b) und c), Feststellung?

Aufgabe 2

a) Das Verfahren von Heun mit $p = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{2}$$

soll adaptiv gesteuert werden. Wählen Sie dazu ein Verfahren RK mit $p = 3$ so, dass der zusätzliche Aufwand möglichst gering bleibt.

Geben Sie den Schätzwert für $d_{k+1}^{(\text{Heun})}$ an, womit die Schrittweite gesteuert wird.

b) Gegeben ist das folgende Schema eines Runge-Kutta Verfahrens mit der Fehlerordnung $p = 3$.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \tag{3}$$

Wählen Sie in $a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_3 = \frac{3}{4}$ und bestimmen Sie die restlichen Grössen in (3).

Stellen Sie auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ graphisch dar, wie das Verfahren (3) für obige Wahl von a_2 und a_3 rechnet.

Einheiten: Intervall $[x_k, x_{k+1}] \equiv 36$ Häuschen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = x + y \qquad \text{mit der AB } y(0) = 0. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (4).

b) Die Lösung von (4) soll nun numerisch mit der Trapezmethode und Schrittweite $h = 0.5$ approximiert werden.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie anschliessend die beiden ersten Schritte aus.

c) Geben Sie den globalen Fehler für $x = 1$ an.

ME09b   MND2   Lösungen zweiter Test   11.05.11

Lösung 1

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ mit den AB $y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Heun, $p = 2$, Schema:

$$(5) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ k_2 &= A \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + h \cdot k_1 \right) = A \left(I_2 + h \cdot A \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = \left(I_2 + h \cdot A + \frac{h^2}{2!} \cdot A^2 \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) "verbesserter Polygonzug", $p = 2$, Schema:

$$(6) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ k_2 &= A \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \cdot k_1 \right) = A \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ y_1 &= y_0 + h \cdot k_2 = \left(I_2 + h \cdot A + \frac{h^2}{2!} \cdot A^2 \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) und c) sind identisch!

Lösung 2

a) Steuerung von (2) z.B. mit

$$(7) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

Vorschlag von C. Moler.

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{\text{Heun}} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{2} \cdot \{\bar{k}_1 + \bar{k}_2\} \\ d_{k+1}^{\text{Moler}} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{6} \cdot \{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + 4\bar{k}_3\} \\ \Longrightarrow \quad d_{k+1}^{\text{Heun}} &= \frac{h}{3} \cdot \{-\bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 2\bar{k}_3\} + O(h^4) \end{aligned}$$

d.h. zur adaptiven Schrittweitensteuerung von Heun mit $p = 2$ wird $\left\| \frac{h}{3} \cdot \{-\bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 2\bar{k}_3\} \right\|_2$ verwendet.

Zusätzlicher Aufwand: nur eine Funktionsauswertung, da die beiden Verfahren eingebettet sind.

b)

$$(8) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{array}$$

graphische Darstellung von (8).

Lösung 3

Die inhomogene Dgl (4) ist linear mit konstanten Koeffizienten.

a)

$$y(x) = e^x - (1 + x), \qquad x \geq 0.$$

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ mit der AB $y_0 = 0$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1} + y_{k+1}\} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

also

$$\left(\frac{2-h}{2}\right) \cdot y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\}$$

und damit

$$y_{k+1} = \left(\frac{2}{2-h}\right) \cdot \left\{ y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\} \right\} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

erster Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_1 = \frac{4}{3} \cdot \left\{ y_0 + \frac{1}{4} \cdot \{x_0 + y_0 + x_1\} \right\} = \frac{1}{6}$$

zweiter Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot \left\{ y_1 + \frac{1}{4} \cdot \{x_1 + y_1 + x_2\} \right\} = \frac{7}{9}$$

c) der globale Fehler beträgt:

$$g_2 = \left| e^1 - 2 - \frac{7}{9} \right| = 0.0595$$