Klassen WI09b **MLAN4 Schlussprüfung** 28. Juni 2011

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = x + y \qquad \text{mit der AB } y(0) = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Die Lösung von (1) soll nun numerisch mit der Trapezmethode und Schrittweite $h = 0.5$ approximiert werden.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie anschliessend den ersten und den zweiten Schritt aus.

c) Geben Sie den globalen Fehler für $x = 1$ an.

Aufgabe 2

a) Das Verfahren von Heun mit $p = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{2}$$

soll adaptiv gesteuert werden. Wählen Sie dazu ein RK–Verfahren mit der Fehlerordnung $p = 3$ so, dass der zusätzliche Aufwand möglichst gering bleibt.

Geben Sie den Schätzwert für $d_{k+1}^{(\text{Heun})}$ an, womit die Schrittweite gesteuert wird.

b) Gegeben ist das folgende Schema eines Runge-Kutta Verfahrens mit der Fehlerordnung $p = 3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \tag{3}$$

Wählen Sie in (3) $a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_3 = \frac{3}{4}$ und bestimmen Sie die restlichen Grössen in (3).

Stellen Sie auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ graphisch dar, wie das Verfahren (3) für die obige Wahl von a_2 und a_3 rechnet.

Einheiten: Intervall $[x_k, x_{k+1}] \equiv 36$ Häuschen.

bitte wenden

Aufgabe 3

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = t \cdot y \qquad \text{mit der AB } y(0) = 1. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (4).

b) Die Lösung aus a) soll mit der Methode der Taylorreihe approximiert werden. Der globale Fehler soll dabei von der Ordnung $p = 5$ sein. Formulieren Sie den allgemeinen Schritt von t_k nach $t := t_k + h$ und geben Sie die entsprechenden Koeffizienten rekursiv an.

Aufgabe 4

Gegeben ist das folgende $4-$ stufige explizite Runge–Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
1 & 0 & 1 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6}
\end{array} \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion von (5) mit Hilfe von $y' = \lambda \cdot y$, AB $y(0) = 1$.

b) Bestimmen Sie die Ordnung p von (5).

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 0.4 \cdot \dot{y} + 16.04 \cdot y = 0\,. \tag{6}$$

a) Schreiben Sie (6) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix, sowie die Steifheit des Systems.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems in a) an.

c) Die Lösung des Systems in a) soll mit dem "Verbesserten Polygonzug" mit 3 korrekten Dezimalen nach dem Komma approximiert werden (Toleranz $\varepsilon =?$). Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y = g(x) \qquad \text{mit den AB } y(0) = \alpha_0,\ y'(0) = \alpha_1,\ y''(0) = \alpha_2,\ y'''(0) = \alpha_3. \tag{7}$$

a) Schreiben Sie (7) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung des Systems in a) soll nun numerisch mit den Methoden "Euler explizit" und "Euler implizit" bestimmt werden.
Formulieren Sie für beide Methoden je den allgemeinen Schritt, aufgelöst nach der zu berechnenden Grösse, (für eine gegebene Schrittweite $h > 0$).

c) Könnten Sie das System in a) durch Entkopplung lösen? (*mit* Begründung)

Viel Erfolg!

Lösung 1

Die inhomogene Dgl (1) ist linear mit konstanten Koeffizienten.

a)

$$y(x) = e^x - (1 + x), \qquad x \geq 0.$$

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ mit der AB $y_0 = 0$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1} + y_{k+1}\} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

also

$$\left(\frac{2-h}{2}\right) \cdot y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\}$$

und damit

$$y_{k+1} = \left(\frac{2}{2-h}\right) \cdot \left\{y_k + \frac{h}{2} \cdot \{x_k + y_k + x_{k+1}\}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots$$

erster Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_1 = \frac{4}{3} \cdot \left\{y_0 + \frac{1}{4} \cdot \{x_0 + y_0 + x_1\}\right\} = \frac{1}{6}$$

zweiter Schritt mit $h = \frac{1}{2}$:

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot \left\{y_1 + \frac{1}{4} \cdot \{x_1 + y_1 + x_2\}\right\} = \frac{7}{9}$$

c) der globale Fehler beträgt:

$$g_2 = \left|e^1 - 2 - \frac{7}{9}\right| = 0.0595$$

Lösung 2

a) Steuerung von (2) z.B. mit

$$(8) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

Vorschlag von C. Moler.

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{\text{Heun}} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{2} \cdot \left\{\bar{k}_1 + \bar{k}_2\right\} \\ d_{k+1}^{\text{Moler}} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{6} \cdot \left\{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + 4\bar{k}_3\right\} \\ \Longrightarrow \quad d_{k+1}^{\text{Heun}} &= \frac{h}{3} \cdot \left\{-\bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 2\bar{k}_3\right\} + O(h^4) \end{aligned}$$

d.h. zur adaptiven Schrittweitensteuerung von Heun mit $p = 2$ wird $\left\|\frac{h}{3} \cdot \left\{-\bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 2\bar{k}_3\right\}\right\|_2$ verwendet.
Zusätzlicher Aufwand: nur eine Funktionsauswertung, da die beiden Verfahren eingebettet sind.

b)

(9)
$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9}
\end{array}
$$

graphische Darstellung von (9).

Lösung 3

(4) ist homogen und separierbar, also

a)
$$y_h(t) = C \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \qquad \Longrightarrow y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\,, t \geq 0\,.$$

b) $t = t_k + h$, $h = t - t_k$:
allgemeiner Schritt von y_k nach $y_{k+1} \approx y(t) = y(t_k + h)$, also

$$
\begin{aligned}
&(10) \qquad & y(t) &= y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots \\
&(11) \qquad & \dot{y}(t) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

(10) und (11) in (4) einsetzen und anschliessend Koeffizientenvergleich in Bezug auf die Potenzen in h:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + \ldots \\
&= (t_k + h) \cdot (y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots)
\end{aligned}
$$

Da hier Ordnung $p = 5$ muss bis und mit c_5 entwickelt werden, dann ist $d_{k+1} = O(h^6)$:

$$
\begin{array}{rcl}
h^0: & c_1 = t_k y_k & \text{expliziter Euler} \\
h^1: & 2c_2 = y_k + t_k c_1 & c_2 = \dfrac{1}{2} \cdot (y_k + t_k c_1) \\
h^2: & 3c_3 = c_1 + t_k c_2 & c_3 = \dfrac{1}{3} \cdot (c_1 + t_k c_2) \\
h^3: & 4c_3 = c_2 + t_k c_3 & c_4 = \dfrac{1}{4} \cdot (c_2 + t_k c_3) \\
h^4: & 5c_5 = c_3 + t_k c_4 & c_5 = \dfrac{1}{5} \cdot (c_3 + t_k c_4) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
h^{p-1}: & pc_p = c_{p-2} + t_k c_{p-1} & c_p = \dfrac{1}{p} \cdot (c_{p-2} + t_k c_{p-1})
\end{array}
$$

und damit erhalten wir

$$y_{k+1} = y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösung 4

a) Stabilitätsfunktion $R(h\lambda)$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_k \\
k_2 &= \lambda\left(y_k + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda y_k + \frac{h}{2}\lambda^2 y_k \\
k_3 &= \lambda(y_k + hk_2) = \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + \frac{h^2}{2}\lambda^3 y_k \\
k_4 &= \lambda(y_k + hk_3) = \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + h^2\lambda^3 y_k + \frac{h^3}{2}\lambda^4 y_k
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}\{k_1 + 4k_2 + k_4\} \\
&= y_k + \frac{h}{6}\left\{\lambda y_k + 4\left(\lambda y_+ \frac{h}{2}\lambda^2 y_k\right) + \lambda y_k + h\lambda^2 y_k + h^2\lambda^3 y_k + \frac{h^3}{2}\lambda^4 y_k\right\} \\
&= y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2!}y_k + \frac{(h\lambda)^3}{3!}y_k + \frac{(h\lambda)^4}{12}y_k \\
&= R(h\lambda)\cdot y_k
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{12} \tag{12}$$

b) In (12) ist der letzte Nenner "falsch", statt $4!$ erhalten wir nur die Hälfte davon, d.h. das Verfahren hat nur die Ordnung $p = 3$, obwohl es $4-$ stufig ist!

Lösung 5

a) Substitution: $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16.04 & -0.4 \end{pmatrix}$.

Weiter gilt: $J = A$, da es sich um ein lineares Problem handelt. EW von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 0.4\lambda + 16.04 \stackrel{!}{=} 0$, also $\lambda_{1.2} = -0.2 \pm j\cdot 4 \Longrightarrow S(t) = 1 =$ konstant.

b)

$$x_h(t) = 2\cdot e^{\alpha_1 t}\left\{(a_1\cos(\beta_1 t) - b_1\sin(\beta_1 t))\cdot u^{(1)} - (a_1\sin(\beta_1 t) + b_1\cos(\beta_1 t))\cdot w^{(1)}\right\} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $\alpha_1 = -0.2$, $\beta_1 = 4$ und der EV $v^{(1)}$ zu λ_1 ist

$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = u^{(1)} + j\cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} + j\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Toleranz $\varepsilon = 5\cdot 10^{-4}$. Hier muss nur der Realteil $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \alpha_1 = -0.2$ berücksichtigt werden:

$$\left|\frac{(h\cdot\alpha_1)^3}{3!}\right| < 5\cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow h^3 < \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow h_1 < \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 0.7211$$

$$e^{-0.2t} < 5\cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow t_1 = \frac{\ln(5\cdot 10^{-4})}{-0.2} = 38.0045$$

Mit h_1 werden bereits $n_1 \geq \frac{t_1}{h_1} = 52.7017$, also $n_1 = 53$ Schritte gemacht.

Lösung 6

a) Substitution:

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= y' \\ z_3 &= y'' \\ z_4 &= y''' \end{aligned} \quad z' = A \cdot z + g_4(x)\ ,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \ z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

b) mit $f(x, z) := A \cdot z + g_4(x)$ erhalten wir:

"Euler explizit":

$$z^{(k+1)} = (I_4 + h \cdot A) \cdot z^{(k)} + h \cdot g_4(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

"Euler implizit":

$$z^{(k+1)} = (I_4 - h \cdot A)^{-1} \cdot \left\{ z^{(k)} + h \cdot g_4(x_{k+1}) \right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

c) EW von A:

$p_A(\lambda) = \lambda^4 + 1 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_k = e^{j\varphi_k}$, wobei $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3.$

($4-$ te Wurzel aus $(-1) = e^{j(\pi + k2\pi)}$, daher alle EW komplex; zwei konjugiert komplexe Paare)

d.h.

- wir haben vier verschiedene EW λ_k mit je der algVF$(\lambda_k) = 1$ und
- da $1 \leq$ geomVF$(\lambda_k) \leq$ algVF$(\lambda_k) = 1$ gilt, folgt sofort geomVF$(\lambda_k) =$ algVF$(\lambda_k) = 1$, $k = 1, 2, 3, 4,$
- d.h. A ist einfach und daher diagonalisierbar.

Die Lösung ist durch Entkopplung möglich.