Klasse WI09b **MLAN4 erster Test** 25. März 2011

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2, x_3) := 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2 \tag{1}$$

Für welche $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_2 = 1$ wird $Q(x_1, x_2, x_3)$ extremal?
Geben Sie x und die Extrema an, (*alle* Lösungen).

b) Die allgemeine Lösung eines linearen homogenen Dgl-Systems $\dot{x} = Ax$ lautet:

$$x_h(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Systemmatrix A an.

Aufgabe 2

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 4y_1 & & & + & y_3 \\ y_2' & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ y_3' & = & -2y_1 & & & + & y_3 \end{array} \right.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Entkopplung.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung für die $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ und $y_3'(0) = 2$ erfüllt sind.

c) Wie müssten Sie, falls möglich, die AB wählen, damit die Lösung für $x \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?
(*mit* Begründung)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Rekursion

$$x_n = A \cdot x_{n-1} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

a) Zegen Sie, dass $x_n = A^n \cdot x_0$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie A^n, $n = 0, 1, \ldots$

c) Wohin streben die Vektoren x_n?

WI09b MLAN4 Lösungen erster Test 25.03.11

Lösung 1

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

EWP von A: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Extremalwerte: Maximum $Q_{\text{max}} = 5$ für $x_{\text{max}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$Q_{\text{min}} = -1$ für $x_{\text{min}} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ sowie $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = TDT^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A = A^T$

Lösung 2

a) EWP von $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$

$y_h(t) = c_1 e^x \cdot v^{(1)} + c_2 e^{2x} \cdot v^{(2)} + c_3 e^{3x} \cdot v^{(3)} \quad v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \mu_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) AB: $y_3'(x) = c_1 e^x \cdot 0 + 2c_2 e^{2x} \cdot 1 + 3c_3 e^{3x} \cdot 1$, und damit erhalten wir
$c_1 = 1$, $c_2 = -2$ und $c_3 = 2$ (alle $\mu_k = 1$)

c) Sobald ein $y_k(0) \neq 0$ geht die Lösung gegen ∞, da alle $\lambda_k > 0$, nur möglich falls $y(0) = 0$ für alle Komponenten, was die Null-Lösung $y(x) \equiv 0$ liefert.

Lösung 3

a) Ein Schritt rückwärts: $x_n = A \cdot x_{n-1} = A \cdot (A \cdot x_{n-2}) = A^2 \cdot x_{n-2}$
ein weiterer Schritt rückwärts: $x_{n-2} = A \cdot x_{n-3}$, einsetzen: $x_n = A^3 \cdot x_{n-3}$, ...
so können insgesamt n Schritte rückwärts gemacht werden, was $x_n = A^n \cdot x_0$ liefert.

b) $A = A^T:\ \ D = T^T A T$, $T =$ orthogonal $\Longrightarrow A = TDT^T$ und damit $A^n = TD^nT^T$

EWP von A: $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

damit $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^T = T$, also

$$A^n = TD^nT^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\frac{3}{4})^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} (\frac{3}{4})^n + (-\frac{1}{2})^n & -(\frac{3}{4})^n + (-\frac{1}{2})^n \\ -(\frac{3}{4})^n + (-\frac{1}{2})^n & (\frac{3}{4})^n + (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

c) $x_n \longrightarrow 0$, da beide EW betragskleiner als 1 sind

Lösung 4 *alt*

a) Substitution: $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$ und $z_4 = y'''$ und damit haben wir

$$z' = Az, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

b) Lösung durch Entkopplung, d.h. EWP von A.

$p_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0$, Hornerschema.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_{3.4} = \pm j$.

zugehörige EV: dim(Kern$(A - \lambda_1 I_4)) = 1$ statt 2, d.h. wir haben geomVF$(\lambda = 1) <$ algVF$(\lambda = 1)$.

Wir können *nicht* entkoppeln, da zu $\lambda = 1$ ein EV zu wenig bestimmt werden kann $\Longrightarrow$ Jordan–Block

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Lösung 5 *alt*

a) $p_A(\lambda) = (4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 12 - \varepsilon^2) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_{2.3} = 4 \pm \sqrt{4 + \varepsilon^2}$.
A ist positiv definit, falls $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, 3 \Longleftrightarrow \sqrt{4 + \varepsilon^2} < 4 \Longleftrightarrow \varepsilon^2 < 12 \Longleftrightarrow 0 < \varepsilon < 2\sqrt{3}$.

b) Für $\varepsilon^2 \longrightarrow 12$ geht $|\lambda_3| \longrightarrow 0$, d.h.

$$\lim_{\varepsilon^2 \to 12} \kappa(A(\varepsilon)) = \frac{4 + \sqrt{4 + \varepsilon^2}}{|4 - \sqrt{4 + \varepsilon^2}|} = \infty$$

Lösung 6 *alt*

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 96t \end{pmatrix}$

und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lösung durch Entkopplung:

EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $g_{\mathsf{neu}}(t) = 16t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$z_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z_p(t) \quad z_{\mathsf{neu}_p}(t) = \begin{pmatrix} -1 - 4t \\ 4 - 8t \end{pmatrix} \quad z_p(t) = T z_{\mathsf{neu}_p}(t) = \begin{pmatrix} 3 - 12t \\ -12 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = 3$ und $c_2 = -3$.

b) $c_1 = 0$ genügt nicht, da $\|z_p(t)\| \longrightarrow \infty$, d.h. die Lösung wird für alle AB betragsmässig beliebig gross.

weitere Lösungen

Lösung 7

a)

$$x^T A x + c^T x + 4 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}$$

EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 9$ mit den o.n. EV $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also $T = (b_1\; b_2)$ und $T^{-1} = T^T$, da T orthogonal. $c_{neu} = T^T c = \begin{pmatrix} -8 \\ -36 \end{pmatrix}$

In Σ_{neu} aufgespannt von b_1 und b_2, (nach quadratischer Ergänzung):

$$\frac{(x_{neu_1} - 1)^2}{9} + \frac{(x_{neu_2} - 2)^2}{4} = 1 \qquad M_{neu}(1,\, 2) \qquad M_{alt}(0,\, \sqrt{5})$$

b) Es handelt sich um eine Ellipse, da $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Die Halbachsen sind $a = 3$ und $b = 2$. Die Hauptachsen sind um den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ verdreht, der Mittelpunkt ist um den Vektor $t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ verschoben.

c) Graphik

Lösung 8

a) $A = A^T$, det$(A - \lambda I_3) = (4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 8) \overset{!}{=} 0$, $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_{2.3} = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
D.h. alle EW sind positiv, d.h. A ist positiv definit.
$Q_{max} = 4 + 2\sqrt{2}$ und $Q_{min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$. Spur$(A) = -2$, det$(A) = 3$

$$\hat{T} = \left(u^{(1)}\; w^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T}^{-1} A \hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = A_{neu}$$

und damit

$$A = \hat{T} A_{neu} \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 9

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e}\right)$

Lösung 10

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 11

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x)\right\}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 12

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A + B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 13

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 14

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 15

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 16

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2