Klasse WI09b **MLAN4 zweiter Test** 29. April 2011

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + 2y' - 3y = 2x - 4 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Formulieren Sie für das System in a) die Methode von Euler (allgemeiner Schritt).

c) Führen Sie die ersten beiden Schritte mit der Schrittweite $h = 0.1$ aus.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$(2) \qquad \ddot{x} + \frac{1}{4}\,\dot{x} + x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \alpha$ und $\dot{x}(0) = \beta$.

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung von a) soll numerisch approximiert werden. Führen Sie einen Schritt mit dem Verfahren von Heun der Ordnung $p = 2$ von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

c) Approximieren Sie die Lösung aus a) mit der Methode "verbesserter Polygonzug", (Schrittweite $h > 0$). Führen Sie den ersten Schritt aus.

Vergleich von b) und c), Feststellung?

Aufgabe 3

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(3) \qquad (1+t)\,\dot{x} - \alpha\, x = 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1$$

Lösen Sie (3) mit Hilfe der Methode der Taylorreihe. Betrachten Sie dabei den allgemeinen Schritt von t_k nach $t := t_k + \Delta t$. Entwickeln Sie soweit, dass das Verfahren die Fehlerordnung $p = 4$ hat.

b) Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = 2e^{-t}\left\{\left[a_1 \cos(\sqrt{2}t) - b_1 \sin(\sqrt{2}t)\right] u^{(1)} - \left[a_1 \sin(\sqrt{2}t) + b_1 \cos(\sqrt{2}t)\right] w^{(1)}\right\},$$

wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ gegeben.

Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A an. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. Bestimmen Sie A.

Aufgabe 4 *alt*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 4\dot{y} - 21y = 0 \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta. \tag{4}$$

a) Schreiben Sie (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Diffenerentialgleichungssystems aus a) mit den gegebenen AB.

c) Die Lösung aus b) soll numerisch approximiert werden. Geben Sie für den verbesserten Polygonzug den allgemeinen Schritt für $h > 0$ an und führen Sie mit dieser Methode mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ den ersten Schritt aus.

Aufgabe 5 *alt*

Student "Drei"stein schlägt das folgende Verfahren mit

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{5}$$

vor. Er behauptet, dass (5) von der Ordnung $p = 2$ sei.

a) Ist das Verfahren so gut wie Euler explizit? Ist seine Behauptung richtig? Würden Sie (5) verwenden?

b) Wenn nein, wie müsste (5) modifiziert werden?

Beantworten Sie obige Fragen mit dem Testbeispiel $y'(x) = \lambda \cdot y(x)$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 6 *alt*

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem mit der Systemmatrix

$$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und } x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Ist A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Das Dgl–System in (6) soll nun numerisch mit der Trapezmethode gelöst werden, Schrittweite $h = 0.2$.

Formulieren Sie den allgemeinen Schritt $x_k \longrightarrow x_{k+1}$ und führen Sie den ersten Schritt von x_0 nach x_1 aus.

b) Gegeben ist das folgende Schema eines Runge-Kutta Verfahrens mit der Fehlerordnung $p = 3$.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \tag{7}$$

Wählen Sie in $a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die restlichen Grössen in (7).

Stellen Sie auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ graphisch dar, wie das Verfahren (7) rechnet.

Einheiten: Intervall $[x_k, x_{k+1}] \equiv 24$ Häuschen.

WI09b MLAN4 Lösungen zweiter Test 29.04.11

Lösung 1

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = y' \Longrightarrow z' = Az + g(x)$,

wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x-4 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$

AB: $z(0) = z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Methode von Euler:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + h \cdot f\left(x_k, z^{(k)}\right) = z^{(k)} + h \cdot \left\{Az^{(k)} + g(x_k)\right\} \qquad z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

c)

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \qquad z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.16 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

mit den AB $y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Heun, $p = 2$, Schema:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ k_2 &= A\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + h \cdot k_1\right) = A\left(I_2 + h \cdot A\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right) = \left(I_2 + h \cdot A + \frac{h^2}{2!} \cdot A^2\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) "verbesserter Polygonzug", $p = 2$, Schema:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad (9)$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\\
k_2 &= A\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\frac{h}{2}\cdot k_1\right)=A\left(I_2+\frac{h}{2}\cdot A\right)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\\
y_1 &= y_0+h\cdot k_2=\left(I_2+h\cdot A+\frac{h^2}{2!}\cdot A^2\right)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) und c) sind identisch!

Lösung 3

a) $t := t_k + \Delta t$ und damit $\Delta t = t - t_k$

Ansatz für x an der Stelle t:

$x(t) := x_k + c_1\Delta t + c_2(\Delta t)^2 + c_3(\Delta t)^3 + \ldots$ und daraus

$\dot{x}(t) = c_1 + 2c_2\Delta t + 3c_3(\Delta t)^2 + 4c_4(\Delta)^3 + \ldots$

einsetzen in (3) liefert:

$$(1+t_k+\Delta t)\cdot(c_1+2c_2\Delta t+3c_3(\Delta t)^2+4c_4(\Delta t)^3+\ldots) \stackrel{!}{=} \alpha\cdot(x_k+c_1\Delta t+c_2(\Delta t)^2+c_3(\Delta t)^3+c_4(\Delta t)^4+\ldots)$$

Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{array}{rrl}
(\Delta t)^0: & (1+t_k)c_1 = \alpha x_k & c_1 = \dfrac{1}{1+t_k}\cdot\dfrac{\alpha}{1}\cdot x_k\\
(\Delta t)^1: & c_1 + 2c_2(1+t_k) = \alpha c_1 & c_2 = \dfrac{1}{1+t_k}\cdot\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)\cdot c_1\\
(\Delta t)^2: & 2c_2 + 3c_3(1+t_k) = \alpha c_2 & c_3 = \dfrac{1}{1+t_k}\cdot\left(\dfrac{\alpha-2}{3}\right)\cdot c_2\\
(\Delta t)^3: & 3c_3 + 4c_4(1+t_k) = \alpha c_3 & c_4 = \dfrac{1}{1+t_k}\cdot\left(\dfrac{\alpha-3}{4}\right)\cdot c_3\\
& \ldots & \ldots
\end{array}
$$

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$, Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -2$, det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

oder $\hat{T} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & w^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\hat{D} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$ und schliesslich $A = \hat{T}\cdot\hat{D}\cdot\hat{T}^{-1}$

Da $v^1 = u^{(1)} + j\cdot w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\\ -1+j\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \lambda_1\end{pmatrix}$ *muss* die erste Zeile von

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ * & *\end{pmatrix}$ “Null Eins” sein!

Lösung 4 *alt*

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{pmatrix}$,

und den AB $z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -3$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,

also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$,

$$z_h(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = \frac{1}{10}(3\alpha + \beta)$ und $c_2 = \frac{1}{10}(7\alpha - \beta)$.

c)

verbesserter Polygonzug, $p = 2$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{aligned} k_1 &= Az_k \\ k_2 &= A\left(z_k + \tfrac{h}{2} Az_k\right) \\ z_{k+1} &= z_k + h \cdot k_2 = \left(I_2 + hA + h^2 A^2\right) z_k \end{aligned}$$

erster Schritt:

$$z_1 = \left(I_2 + hA + \frac{h^2}{2} A^2\right) z_0 = \begin{pmatrix} \frac{29}{8} & 1 \\ 21 & \frac{61}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Lösung 5 *alt*

a) Mit dem vorgeschlagenen Verfahren erhalten wir:

$$k_1 = \lambda y_k \tag{10}$$

$$k_2 = \lambda(y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1) = \lambda y_k + \frac{h}{3} \lambda^2 y_k \tag{11}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4} \cdot \{2k_1 + k_2\} = \left(1 + \frac{3h}{4}\lambda + \frac{h^2}{12}\lambda^2\right) y_k \tag{12}$$

Euler: $y_{k+1} = (1 + h\lambda) y_k$.

Mit (12) folgt, dass (5) schlechter ist als die Methode von Euler!

(5) sollte nicht verwendet werden!

b) Aus der Theorie:

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= h\, f\, \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F \left\{\frac{1}{2} - a_2 c_2 - a_3 c_3\right\} \\ &\quad + h^3 \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2 c_3 b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2 c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2 c_3]\right\} + O(h^4) \end{aligned}$$

Zweistufiges Verfahren: $a_3 = c_3 = 0$:

Also sollten die beiden folgenden Gleichungen

$$1 = c_2 + c_2 \qquad \frac{1}{2} = a_2 c_2$$

gelten und damit $c_2 = \frac{3}{2}$ und $c_1 = -\frac{1}{2}$. Auf diese Weise hätte (5) die Fehlerordnung $p = 2$.

Lösung 6 *alt*

a) $A = A^T$, d.h. A ist diagonalisierbar.

$$x_{k+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2} \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(I_2 + \frac{h}{2} \cdot A\right) x_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\
&= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 \end{pmatrix} x_0 \\
&= \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 0.88 & 0.4 \\ 0.4 & 0.88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.32} \begin{pmatrix} 2.16 \\ 1.68 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

RK, $p = 3$ $\quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$

Graphik

Lösung 7

a) Substitution: $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$ und $z_4 = y'''$ und damit haben wir

$z' = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mit $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

b) Lösung durch Entkopplung, d.h. EWP von A.

$p_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0$, Hornerschema.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_{3.4} = \pm j$.

zugehörige EV: dim(Kern$(A - \lambda_1 I_4)) = 1$ statt 2, d.h. wir haben geomVF$(\lambda = 1) <$ algVF$(\lambda = 1)$.

Wir können *nicht* entkoppeln, da zu $\lambda = 1$ ein EV zu wenig bestimmt werden kann $\Longrightarrow$ Jordan–Block $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Lösung 8

a) $p_A(\lambda) = (4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 12 - \varepsilon^2) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_{2.3} = 4 \pm \sqrt{4 + \varepsilon^2}$.

A ist positiv definit, falls $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, 3 \Longleftrightarrow \sqrt{4 + \varepsilon^2} < 4 \Longleftrightarrow \varepsilon^2 < 12 \Longleftrightarrow 0 < \varepsilon < 2\sqrt{3}$.

b) Für $\varepsilon^2 \longrightarrow 12$ geht $|\lambda_3| \longrightarrow 0$, d.h.

$$\lim_{\varepsilon^2 \to 12} \kappa(A(\varepsilon)) = \frac{4 + \sqrt{4 + \varepsilon^2}}{|4 - \sqrt{4 + \varepsilon^2}|} = \infty$$

Lösung 9

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 96t \end{pmatrix}$

und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lösung durch Entkopplung:

EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $g_{\text{neu}}(t) = 16t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z_p(t)$ $\quad z_{\text{neu}_p}(t) = \begin{pmatrix} -1 - 4t \\ 4 - 8t \end{pmatrix}$ $\quad z_p(t) = T z_{\text{neu}_p}(t) = \begin{pmatrix} 3 - 12t \\ -12 \end{pmatrix}$

Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = 3$ und $c_2 = -3$.

b) $c_1 = 0$ genügt nicht, da $\|z_p(t)\| \longrightarrow \infty$, d.h. die Lösung wird für alle AB betragsmässig beliebig gross.

Lösung 10

a)

$$x^T Ax + c^T x + 4 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}$$

EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 9$ mit den o.n. EV $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also $T = (b_1 \; b_2)$ und $T^{-1} = T^T$, da T orthogonal. $c_{neu} = T^T c = \begin{pmatrix} -8 \\ -36 \end{pmatrix}$

In Σ_{neu} aufgespannt von b_1 und b_2, (nach quadratischer Ergänzung):

$$\frac{(x_{neu_1} - 1)^2}{9} + \frac{(x_{neu_2} - 2)^2}{4} = 1 \qquad M_{neu}(1,\, 2) \qquad M_{alt}(0,\, \sqrt{5})$$

b) Es handelt sich um eine Ellipse, da $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Die Halbachsen sind $a = 3$ und $b = 2$. Die Hauptachsen sind um den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ verdreht, der Mittelpunkt ist um den Vektor $t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ verschoben.

c) Graphik

Lösung 11

a) $A = A^T$, $\det(A - \lambda I_3) = (4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 8) \stackrel{!}{=} 0$, $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_{2.3} = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
D.h. alle EW sind positiv, d.h. A ist positiv definit.
$Q_{max} = 4 + 2\sqrt{2}$ und $Q_{min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$. Spur$(A) = -2$, $\det(A) = 3$

$$\hat{T} = \left(u^{(1)} \; w^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T}^{-1} A \hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = A_{neu}$$

und damit

$$A = \hat{T} A_{neu} \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 12

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1,\, 2,\, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e}\right)$

Lösung 13

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 14

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\,\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\,\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x)\right\}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 15

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 16

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 17

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 18

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 19

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2