Klasse ST12a **MAE1 zweiter Test** 07. Dezember 2012

Name:

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n + \sqrt{n+1}}{n+1} \right)$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 9}$$

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$q(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Aufgabe 3

a) Welche der beiden Teilsummen s_{99} und s_{100} der Reihe $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots$ ist die grössere?

b) Die Summe der ersten drei Glieder einer geometrischen Folge ist 78, die Summe *aller* restlichen Glieder ist 3. Bestimmen Sie die ersten drei Glieder dieser Folge.

MAE1 Lösungen zweiter Test 07.12.12

Lösung 1

a) Faktorisierung von Zähler (Hornerschema) und Nenner: kürzen mit $(x-2)$ *vor* dem Grenzwert

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \Longrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$$

b) Vor dem Grenzwert mit n kürzen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 5$$

da $\frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.

Lösung 2

a) schriftliche Division mit Rest liefert:

$$y = f(x) = x + 6 + \frac{25x-58}{x^2-6x+9}$$

also: die Asymptote $y = x+6$ beschreibt das Verfalten der Funktion für $x \longrightarrow \pm\infty$.

b) Faktorisierung des Nenners (Hornerschema): $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2\cdot(x+1)$.

Ansatz für die PBZ:

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcr} x^0: & -1 & = & -A & + & B & + & C \\ x^1: & 3 & = & & & B & - & 2C \\ x^2: & 2 & = & A & & & + & C \end{array}\right\}$$

Lösung mit dem Gauss–Algorithmus: $A = \frac{5}{2}$, $B = 2$ und $C = -\frac{1}{2}$

Lösung 3

a) s ist eine geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = -\frac{1}{2}$, also

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^n)$$

und damit

$$s_{99} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^{99}) > s_{100} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^{100})$$

da $q^{99} < 0$ und $q^{100} > 0$.

b) $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 78 + 3 = 81 = a_1\,\frac{1}{1-q}$, $a_1(1+q+q^2) = 78$, woraus $81(1-q^3) = 78$ folgt und somit $q^3 = \frac{1}{27}$, also $q = \frac{1}{3}$.
Da $a_1 = 81(1-q) = 54$, erhalten wir daraus $a_2 = a_1\cdot q = 18$ und $a_3 = a_2\cdot q = 6$