
Name:

Hilfsmittel:	Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit:	120 Minuten.
Bewertung:	Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{1} w_k \, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1}$$

im Intervall $[-1, 1]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (1) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 1 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (1), um das Integral

$$I = \int_0^8 x^2 \, dx$$

numerisch zu integrieren.

- Zerlegen Sie dazu das Intervall $[0, 8]$ in zwei gleichlange Teilintervalle.
- Vergleichen Sie den numerischen Wert mit dem exakten Wert.
- Können Sie sich obigen Vergleich erklären?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{7} \cdot (x_k^2 - 7). \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von (2). Welcher Fixpunkt ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung).

b) Sei $x_0 = 2.1$. Gegen welchen der beiden Fixpunkte strebt (2)?

c) Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_0)|$, wie gross ist q wirklich?

d) Man möchte nun (2) mit einem Faktor $k \in \mathbb{R}$ so verbessern, dass quadratische Konvergenz eintritt.

$$x_{k+1} = x_k - k \cdot (x_k^2 - 7)$$

Wie muss k gewählt werden?

Aufgabe 3

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem (AWP)

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = g(x) \qquad \text{AB:} \left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right. \qquad g(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2x-4 & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , 2 \le x \end{array} \right.$$

a) Stellen Sie die Anregung $g(x)$ graphisch dar.

b) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ für $0 \le x \le 2$.

c) Was muss für $x = 2$ verlangt werden, damit die Lösung $y(x)$ für $x \ge 0$ stetig differenzierbar ist?

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y'(x) + 4 \cdot y(x) = 0 \tag{3}$$

a) Auf was für Kurven liegen alle Punkte der $xy-$ Ebene mit einer konstanten Steigung $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Fälle $k > 0$ und $k < 0$.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung (Trajektorie) von (3), die durch den Punkt $P(1, 2)$ geht.

c) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien zu (3).

d) Bestimmen Sie diejenige Orthogonaltrajektorie, die durch den Punkt $P(1, 2)$ geht.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) + (1 + \tan(x)) \cdot y(x) = \cos(x) \tag{4}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (4) durch Variation der Konstanten.

Aufgabe 6

a) Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{2} + c \qquad |c| \le \frac{3\pi}{4} \tag{5}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung keine, eine, zwei oder drei Lösungen?

Graphische Darstellung: $1 \hat{=} 4$ Häuschen, $\pi \hat{=} 12$ Häuschen.

b) Sei $c = 0$.

Wie müssen Sie Start–Intervalle für die Bisektion oder die lineare Interpolation wählen, um die Lösungen von (5) bestimmen zu können.

numerische Integration

Lösung 1

a) zu erfüllende Bedingungen, zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\xi^0\,d\xi &= 2 = w_0 + w_1\\ \int_{-1}^{1}\xi^1\,d\xi &= 0 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot w_0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot w_1\end{aligned}$$

Lösung: $w_0 = w_1 = 1$.

Quadraturformal (1) auf dem Referenzintervall:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \approx Q = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b) Transformationen:

$$[-1,1] \longrightarrow [0,4] \qquad x = x(\xi) = m\xi + q \qquad m = 2 \qquad q = 2$$

Transformation der Stützstellen:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{3}} &\longmapsto -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\\ \frac{1}{\sqrt{3}} &\longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\end{aligned}$$

$$[-1,1] \longrightarrow [4,8] \qquad x = x(\xi) = m\xi + q \qquad m = 2 \qquad q = 6$$

Transformation der Stützstellen:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{3}} &\longmapsto -\frac{2}{\sqrt{3}} + 6\\ \frac{1}{\sqrt{3}} &\longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} + 6\end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^4 x^2\,dx \approx 2\cdot\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}+2\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+2\right)^2\right\} = 16 + \frac{16}{3} = 21 + \frac{1}{3}$$

und

$$\int_4^8 x^2\,dx \approx 2\cdot\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}+6\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+6\right)^2\right\} = 144 + \frac{16}{3} = 21 + \frac{1}{3} = 149 + \frac{1}{3}$$

schliesslich

$$\int_0^4 x^2\,dx + \int_4^8 x^2\,dx = 170 + \frac{2}{3}$$

exakter Wert:

$$\int_0^8 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^8 = \frac{512}{3} = 170 + \frac{2}{3}$$

D.h. die Quadratur ist exakt! Obige Quadratur ist sogar für alle Polynome dritten Grades exakt, da es sich um die $2-$ Punkte Formel von Gauss handelt.

nicht–lineare Gleichung, gewöhnliche Iteration

Lösung 2

$F(x) = x - \frac{1}{7}\,(x^2 - 7)$ mit $F'(x) = 1 - \frac{2}{7}\,x$

a) $s_1 = \sqrt{7}$ und $s_2 = -\sqrt{7}$: $F'(s_1) = 1 - \frac{2}{7}\,\sqrt{7} < 1$ und $F'(s_2) = 1 + \frac{2}{7}\,\sqrt{7} > 1$, also s_1 ist attraktiv und s_2 ist abstossend.

b) gegen s_1, da $x_0 > 0,\ x_1 > 0,\ \ldots$ und s_1 attraktiv!

c) $q \approx 1 - \frac{2}{7}\,2.1 = \frac{4}{10}$, $q = 1 - \frac{2}{7}\,\sqrt{7}$

d) $F'(\sqrt{7}) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

Dgl

Lösung 3

a) Graphik

b) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$
und damit $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$
Ansatz für $y_p(x) = ax + b$, da die Anregung linear in x, einsetzen
$2a - 3(ax + b) \stackrel{!}{=} 2x - 4$ und Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lcl} x^1: & -3a & = 2 \\ x^0: & 2a - 3b & = -4 \end{array}$$

liefert $y_p(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9}$, schliesslich

$$y_a(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{9} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_a'(x) = c_1 e^x + (-3) \cdot c_2 e^{-3x} - \frac{2}{3}$$

Bestimmung von c_1 und c_2:

$$\begin{aligned} y_a(0) = &\ \ c_1 + c_2 + \tfrac{8}{9} && \stackrel{!}{=} 1 \\ y_a'(0) = &\ \ c_1 - 3c_2 - \tfrac{2}{3} && \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Endschema (Gauss–Algorithmus):

c_1	c_2	1
1	1	$\frac{1}{9}$
0	-4	$\frac{5}{9}$

$\Longrightarrow c_2 = -\frac{5}{36}$, und $c_1 = \frac{1}{4}$ und damit

$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - \frac{5}{36} \cdot e^{-3x} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{9} \qquad 0 \le x \le 2$$

c) für $x \ge 2$ müssen die neuen AB

$$\begin{aligned} y(2) &= \frac{1}{4} \cdot e^2 - \frac{5}{36} \cdot e^{-6} - \frac{4}{9} \\ y'(2) &= \frac{1}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{36} \cdot e^{-6} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

verlangt werden.

separierbare Dgl, Isoklinene, Orthogonaltrajektorie

Lösung 4

a) Isoklinen: $y' = k = \text{konstant} \Longrightarrow y = (-k) \cdot \frac{x^2}{4}$, Parabeln mit Scheitelpunkt $S(0,0)$

- $k > 0$: nach unten geöffnete Parabeln
- $k < 0$: nach oben geöffnete Parabeln

b) Dgl (3) ist separierbar: $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2}\,dx \Longrightarrow y_h(x) = c \cdot e^{\frac{4}{x}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Trajektorie durch $P(1,2)$: $2 \overset{!}{=} c \cdot e^4 \Longrightarrow y(x) = \frac{2}{e^4} \cdot e^{\frac{4}{x}}$, $x > 0$.

c) Dgl der Orthogonaltrajektorien zu (3):

$$y' = \frac{x^2}{4y}$$

d) Auch diese Dgl ist separierbar: $y\,dy = \frac{x^2}{4}\,dx \Longrightarrow y_h(x) = \pm\sqrt{\frac{x^3}{6} + 2c}$, $c \in \mathbb{R}$

Lösung durch $P(1,2)$: $2 = \pm\sqrt{\frac{1}{6} + 2c} \Longrightarrow 2c = \frac{23}{6}$,

also $y(x) = \sqrt{\frac{x^3}{6} + \frac{23}{6}}$, $x > 0$, da P im ersten Quadranten.

separierbare Dgl

Lösung 5

- erster Schritt: allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$\frac{dy}{y} = -(1 + \tan(x))\,dx \qquad \ln|y| = -x + \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -x + \ln|\cos(x)| + c$$

  also

$$y_h(x) = c \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

- zweiter Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung
  Ansatz:

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-x} \cdot \cos(x)$$

  mit der Ableitung

$$y_p'(x) = e^{-x} \cdot (c'(x) \cdot \cos(x) - c(x) \cdot \cos(x) - c(x) \cdot \sin(x))$$

  einsetzen liefert

$$c'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = e^x \quad \Longrightarrow y_p(x) = \cos(x)$$

- dritter Schritt: LK

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + \cos(x) = \cos(x) \cdot \left(1 + \frac{c}{e^x}\right) \quad c \in \mathbb{R}$$

nicht–lineare Gleichung

Lösung 6

a) Ableitung der linken Seite: $\cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}$, d.h. in den beiden Kurvenpunkten $P_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_2\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ist die Tangente an $y = \sin(x)$ parallel zur Geraden $y = \frac{x}{2} + c$

- keine Lösung: nicht möglich
- eine Lösung:

$$-\frac{3\pi}{4} < c < -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} < c < \frac{3\pi}{4}$$

- zwei Lösungen:

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

- drei Lösungen:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < c < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

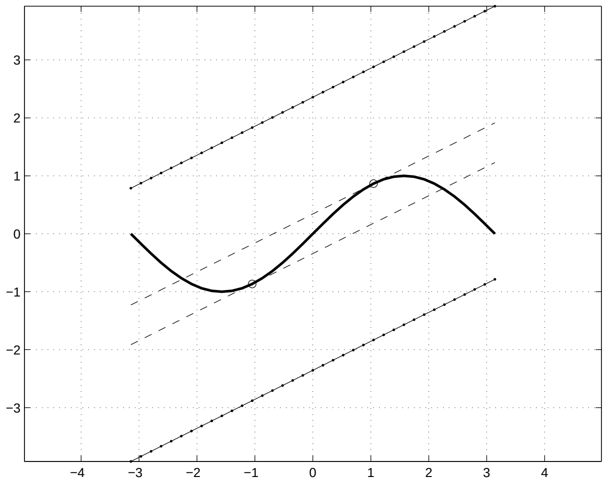

Abbildung 1: Graphische Dartsellung von linker und rechter Seite der nicht–linearen Gleichung.

b)
- In diesem Fall haben wir zwei ungerade Funktionen: $x = 0$ ist eine Lösung, dafür müsste z.B. ein Intervall $[-0.5, 0.5]$ gewählt werden.
- Die positive Lösung ist grösser als $\frac{\pi}{2}$, also z.B. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$
- Die negative Lösung ist symmetrisch zum Ursprung, also z.B. $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]$