Klasse ST11b **MND1 erster Test** 22. Oktober 2012

Name:

Aufgabe 1

Das Integral

$$I = \int_0^a f(x)\,dx \qquad a > 0 \qquad f(x) = 1 + \frac{x^2}{10} \tag{1}$$

a) soll mit der Unter- bzw. Obersumme numerisch bestimmt werden. Dabei wird eine äquidistante Zerlegung von $[0, a]$ verwendet.

   Wie gross muss n sein, damit $O_n - U_n < \frac{a^2}{1000}$ erfüllt ist?

b) Wie oft müssen Sie halbieren, um die Methode von Simpson anwenden zu können?

   Wenden Sie die Methode von Simpson auf (1) an.

   Wie gross wird der dabei gemachte absolute Fehler? (*mit* Begründung).

Aufgabe 2

a) $z^6 + j = 0$, alle Lösungen in Polarform und zudem z_0 in kartesischer Form,
   graphische Darstellung der Lösungen als Zeiger in der Gauss'schen Zahlenebene,
   Einheiten auf beiden Achsen je 8 Häuschen.

b) $|z - 2| \geq |z - z_1^*|$, wobei $z_1 = 1 - j$,
   graphische Darstellung der Lösungsmenge dieser Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene,
   Einheiten auf beiden Achsen je 4 Häuschen.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{z + j}{z - j}\right)^2 = j^{-25}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -h,\ h,\ 3h. \tag{2}$$

im Intervall $[-h, 3h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (2), um

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

   numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ und $f(x) = \cos(x)$.

   Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

ST11b MND1 Lösungen erster Test 22.10.12

Lösung 1 U_n, O_n *und Simpson*

a)

$$O_n - U_n = \Delta x \cdot (f(a) - f(0)) = \frac{a}{n} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{10} - 1\right) = \frac{a^3}{10n} < \frac{a^2}{1000} \quad \text{also } n > 100a$$

b) Die Methode von Simpson braucht eine gerade Anzahl Teilintervalle, d.h. ein Mal Halbieren!

$$\int_0^a f(x)\,dx \approx \frac{a}{2h} \cdot \frac{h}{3} \cdot \left\{f(0) + 4f\left(\frac{a}{2}\right) + f(a)\right\} = \frac{a}{6} \cdot \left\{6 + 2 \cdot \frac{a^2}{10}\right\} = a + \frac{1}{10} \cdot \frac{a^3}{3}$$

Der absolute Fehler $\Delta I = 0$, da $|\Delta I - S(\Delta x)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4$, wobei $M_4 = \max\limits_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) = 0$ für eine quadratische Funktion!

Lösung 2 $\mathbb{C}$

a) Polarform: $-j = e^{j\frac{3\pi}{2}}$ und damit $z_k = e^{j\varphi_k}$ mit $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$z_0 = (1 + j)\frac{\sqrt{2}}{2}$;

graphische Darstellung aller Lösungen am Einheitskreis (um $\frac{\pi}{4}$ gedrehtes reguläres $6-$ Eck).

b) $z = x + jy \Longrightarrow 1 \geq x - y$, graphische Darstellung

c) $j^{-25} = \frac{1}{j} = -j$, da $j^4 = 1$, also: $(z+j)^2 = (-j) \cdot (z-j)^2$ und daraus: $z^2 + 2zj - 1 = (-j) \cdot (z^2 - 2zj - 1)$ und schliesslich $(1+j)z^2 + (1+j)2z - (1+j) = 0 \Longrightarrow z^2 + 2z - 1 = 0$ und $z_{1.2} = -1 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}$!

Lösung 3 *Quadratur mit Transformation*

a) Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 4h \\ -w_0 h & + & h w_1 & + & 3h w_2 & = & 4h^2 \\ w_0 h^2 & + & h^2 w_1 & + & 9h^2 w_2 & = & \frac{28h^3}{3} \end{array}\right.$$

Lösung von (3): $w_0 = w_2 = \frac{2h}{3}$ und $w_1 = \frac{8h}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärtseinsetzen).

b) $[-h, 3h] \longrightarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\frac{\pi}{2}}{4h} \cdot \xi - \frac{\pi}{8}$, $-h \leq \xi \leq 3h$.
Umrechnung der Stützstellen:

$$\xi_0 = -h\colon x_0 = -\frac{\pi}{4} \qquad \xi_1 = h\colon x_1 = 0 \qquad \xi_2 = 3h\colon x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,dx \approx Q = \frac{\frac{\pi}{2}}{4h} \cdot \frac{2h}{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2} + 4\right).$$

exakter Wert des Integrals: $I = \sqrt{2}$
Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2} + 4\right) - \sqrt{2}\right|$ und
relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta I$. Relativer Fehler in Prozenten: $\delta I \cdot 100\%$.