Klasse ST11b **MND1 zweiter Test** 03. Dezember 2012

Name:

Aufgabe 1

Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 1 = x + \sqrt{x}$$

mit der Lösung $x_1 = 1$.
Diese Lösung soll mit einer Fixpunktiteration numerisch bestimmt werden. Dazu wurden folgende Vorschläge gemacht:

i) $x_{n+1} = x_n^2 - \sqrt{x_n} + 1$ ii) $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \sqrt{x_n} - 1}$ iii) $x_{n+1} = \left(x_n^2 + 1 - x_n\right)^2$

a) Welche der vorgeschlagenen Varianten ist konvergent? (*mit* Begründung)

b) Vergleichen Sie die konvergente(n) Variante(n) mit der Bisektion.

- Dabei wird für die Fixpunktiteration $x_0 = 4$ als Startwert verwendet und für die Bisektion wird das Startintervall $[a, b] = [0.5, 1.5]$ gewählt.
- Im Resultat sollen $3-$ Dezimalen nach dem Komma korrekt gerundet sein, $\varepsilon =$?
- Welches der Verfahren ist schneller?
  (*mit* Begründung, inkl. Angabe der Anzahl dazu notwendigen Wiederholungen)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung $x = 0.1 \cdot x^2 + 1$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte.

b) Graphische Darstellung, welcher der Fixpunkte ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung)

c) Der abstossende Fixpunkt soll mit Rückwärtsiteration bestimmt werden, bestimmen Sie die zugehörige Funktion $F^{-1}(x)$, der Startwert sei $x_0 = 8$; bestimmen Sie damit x_1.

Aufgabe 3

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (1) durch Erraten.

   Tipp: Skizzieren Sie sowohl die linke als auch die rechte Seite von (1) im selben Koordinatensystem.

b) Mit der Regula falsi soll nun (1) numerisch gelöst werden. Formen Sie (1) entsprechend um, und geben Sie für jede Nullstelle ein geeignetes Startintervall an.

c) Dem Studenten C ist die Regula falsi zu langsam. Er will (1) mit dem Verfahren von Newton lösen. Wie lautet die dazu nötige Rekursionsformel? Er startet mit $x_0 = 3$. Ist die Konvergenzbedingung für diesen Startwert erfüllt? (*mit* Begründung)

ST11b MND1 Lösungen zweiter Test 03.12.12

Lösung 1

a) $s = 1$, also $s = F(s)$ und für Konvergenz: $|F'(s)| < 1$

i) $F'(x) = 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ii) $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}-1}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ iii) $F'(x) = 2(x^2+1-x)\cdot(2x-1)$

also

$$\text{i) } F'(1) = \frac{3}{2} > 1 \qquad \text{ii) } F'(1) = \frac{3}{4} < 1 \qquad \text{iii) } F'(1) = 2 > 1$$

d.h. nur die Variante ii) ist konvergent.

b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ für beide Verfahren:

Bisektion: in jedem Schritt wird der Fehler halbiert: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^4}{5}\right)$

Variante ii): in jedem Schritt wird der Fehler um $q = \frac{3}{4}$ verkleinert: $n > \frac{\log\left(\frac{5\cdot 10^{-4}}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$

Variante ii) ist also langsamer als die Bisektion.

Lösung 2

a) $x^2 - 10x + 10 = 0$, also $s_{1.2} = 5 \pm \sqrt{15}$

b) $F'(x) = 0.2 \cdot x$ also $F'(s_1) = 0.2 \cdot (5 - \sqrt{15}) < 1$, d.h. s_1 ist attraktiv.
$F'(s_2) = 0.2 \cdot (5 + \sqrt{15}) > 1$, d.h. s_2 ist abstossend.

c) $x_{k+1} = F^{-1}(x_k) = \sqrt{10 \cdot (x_k - 1)}$, $x_0 = 8$ und damit $x_1 = \sqrt{70}$

Lösung 3

a) $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$

b) $f(x) = 2^x - 2x$, also z.B.

- für s_1: $[a_1, b_1] = [0.5, 1.5]$, da $f(0.5) = \sqrt{2} - 1 > 0$ und $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$
- für s_2: $[a_2, b_2] = [1.5, 2.5]$, da $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ und $f(2.5) = 4\sqrt{2} - 5 > 0$

c) Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2^{x_k} - 2x_k}{\ln 2 \cdot 2^{x_k} - 2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| = \left|\frac{(2^x - 2x)(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{(\ln 2 \cdot 2^x - 2)^2}\right| < 1$$

L ausgewertet für $x_0 = 3$: $L = \frac{16\cdot(\ln 2)^2}{4(4\ln 2 - 1)^2} = \frac{4\cdot(\ln 2)^2}{(4\ln 2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4\ln 2})^2} < 1$