

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

- Mengenlehre/Logik
- Beträge
- Funktionen, Diskussion
- Folgen/Reihen
- Polynome, PBZ
- Extremalproblem
- Linearisierung, Approximation
- ...

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \frac{|x| - 1}{|x - 1|}$$

oder

$$y = f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$$

Geben Sie den Def-, Wertebereich, Sprungstellen, Asymptoten, NS an, graphische Darstellung, Einheiten: $1 \hat{=} 2$ Häuschen auf beiden Achsen.

b) Gegeben ist die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}$$

Bestimmen Sie ihre Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2

Die Kurve eines Polynoms 4-ten Grades ist symmetrisch zur y -Achse und hat in $(2, 0)$ einen Wendepunkt so, dass die Wendetangente die Steigung -2 hat. Bestimmen Sie dieses Polynom.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die erste und zweite Ableitung

a) $f(x) = \frac{ax^2}{ax + b}$

b) $g(t) = \sqrt[3]{1-t}$

c) $h(z) = \tan(z)$

Aufgabe 4

Vollständige Kurvendiskussion von

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Def-, Wertebereich, Symmetrien, NS, lokale Extrema, Wendepunkte, asymptotisches Verhalten, Pole,

Aufgabe 5

a) Es sei A eine nicht-leere Menge. Untersuchen Sie, ob die Mengen

$$A \setminus (A \setminus A) \text{ und } (A \setminus A) \setminus A$$

gleich sind oder nicht.

b) Es seien A , B und C Mengen, für die $A \subseteq B \subseteq C$ gelte. Vereinfachen Sie die Menge

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Aufgabe 6

a) Die Mengen A (25 Elemente), B (40 Elemente) und C (50 Elemente) seien gegeben. Zudem gilt $A \subset B \subset C$. Wieviele Elemente enthalten die Mengen $A \cap B$, $B \cup C$, $B \setminus A$ und $A \setminus B$?

b) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagen P , Q und R unter der Annahme, dass die Aussagenverknüpfung $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$ wahr ist.

Aufgabe 7

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

a) Wählen Sie einen Definitionsbereich \mathbb{D} , sodass die Funktion f auf \mathbb{D} umkehrbar ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wertebereich \mathbb{W} und die Umkehrfunktion f^{-1} mit Definitions- und Wertebereich.

b) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)$ mit Benützung der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)$ ohne Benützung der Kettenregel.

Aufgabe 8

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$$

Wählen Sie einen Definitionsbereich \mathbb{D} , sodass die Funktion f auf \mathbb{D} umkehrbar ist. Bestimmen Sie den zugehörigen

b) Ist die Funktion $y = |\sin(x)|$ stetig?

c) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}}$$

Welche Glieder der Folge weichen vom Grenzwert um weniger als 1 Promille ab?

d) Bestimmen Sie die Parameter m und q so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1 & (x < 0) \\ mx + q & (x \geq 0) \end{cases}$$

überall differenzierbar ist.

Aufgabe 9

Stellen Sie in der xy -Ebene die Punktmenge \mathbb{B} für die

$$\mathbb{B} = \left\{ (x, y) \mid |x - 2| + |y + 1| \leq 3 \right\}$$

erfüllt ist, graphisch dar.

a) Fallunterscheidung für die einzelnen Beträge!

b) Graphische Darstellung, Einheiten: 1 $\hat{=}$ 2 Häuschen auf beiden Achsen.

Aufgabe 10

Eine polynomiale Funktion $f(x)$ von Grad 4 besitzt die Wendepunkte $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, sowie die Nullstelle $x = 0$. Bestimmen Sie $f(x)$.

Aufgabe 11

a) Berechnen Sie die Summe $250 + 244 + 238 + \dots + 40$.

b) Welches ist der grösste Wert, den der Quotient q einer geometrischen Folge annehmen kann, wenn die Folge mit $a_1 = 4$ beginnt und die Summe der zugehörigen Reihe den Wert 12 nicht übersteigen darf?

Aufgabe 12

Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h und dem Durchmesser d der Grundkreisfläche soll ein Zylinder mit möglichst grossem Volumen eingeschrieben werden. Wie sind der Durchmesser x und die Höhe y des Zylinders zu wählen? Wie gross ist sein maximales Volumen?

Aufgabe 13

a) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}}$$

Welche Glieder der Folge weichen vom Grenzwert um weniger als 1 Promille ab?

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren, oder begründen Sie, warum sie nicht existieren:

$$b_1) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ (1 + (-1)^{k+1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right\} \quad b_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ ((-1)^{2n+1} + 1) \cdot \frac{1}{n^2} \right\}$$

Aufgabe 14

- Gegeben ist eine Parabel $y = p_2(x) = x^2 + 2x - 3$ und ein Punkt $P(1, -1)$.
- Gesucht sind die Tangenten durch P an die Parabel sowie ihre Berührungspunkte.

Aufgabe 15

a) Zeigen Sie, dass für beliebige Aussagen P, Q die logische Äquivalenz

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

gilt.

b) Gegeben ist die Wahrheitstabelle

A	B	C	T
f	f	f	w
f	f	w	w
f	w	f	w
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	f
w	w	f	w
w	w	w	w

Drücken Sie T als möglichst einfache Verknüpfung von A, B und C mit Hilfe von \neg, \wedge und \vee aus.

Lösung 1

- a)
- b)

Lösung 2

- a)
- b)

Lösung 3

- a)
- b)

Lösung 4

- a)
- b)

Lösung 5

- a)
- b)

Lösung 6

- a)
- b)