Klasse ST12a **MAE1 Schlussprüfung** 17. Januar 2013

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Hilfsmittel:** Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
**Zeit:** 120 Minuten.
**Bewertung:** Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

## Aufgabe 1

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)$ *mit* Benützung der Kettenregel.
- Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)$ *ohne* Benützung der Kettenregel.

b) Bestimmen Sie die möglichen Wahrheitswerte der Aussagen $P$, $Q$ und $R$ unter der Annahme, dass die Aussagenverknüpfung $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$ wahr ist.

## Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Parameter $m$ und $q$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1 & (x < 0) \\ mx + q & (x \geq 0) \end{cases}$$

überall differenzierbar ist. Graphische Darstellung: Einheiten: $1 \hat{=} 2$ und $\pi \hat{=} 6$ Häuschen.

b) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \frac{-9}{x-2}$$

- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 5$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der linearen Approximation von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 5$ einen Näherungswert für $f(5.5)$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

## Aufgabe 3

a) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}}$$

Welche Glieder der Folge weichen vom Grenzwert um weniger als $1$ Promille ab?

b) Welches ist der grösste Wert, den der Quotent $q$ einer geometrischen Folge annehmen kann, wenn die Folge mit $a_1 = 4$ beginnt und die Summe der zugehörigen Reihe den Wert 12 nicht übersteigen darf?

**Bitte wenden**

**Aufgabe 4**

Eine polynomiale Funktion $f(x)$ vom Grad 4 besitzt die Wendepunkte $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, sowie die Nullstelle $x = 0$. Bestimmen Sie $f(x)$.

**Aufgabe 5**

a)

$$y = f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

Geben Sie den Def–, Wertebereich, und falls vorhanden: Sprungstellen, Asymptoten, Pole, Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

Graphische Darstellung: Einheiten: $1 \widehat{=} 2$ Häuschen auf beiden Achsen.

b) Gegeben ist die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2+4x-1}{x^3-3x^2+6x-4}$$

Bestimmen Sie ihre Partialbruchzerlegung.

**Aufgabe 6**

Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe $h$ und dem Durchmesser $d$ der Grundkreisfläche soll ein Zylinder mit möglichst grossem Volumen eingeschrieben werden. Wie sind der Durchmesser $x$ und die Höhe $y$ des Zylinders zu wählen? Wie gross ist sein maximales Volumen?

**ST12a MAE1 Lösungen Schlussprüfung 17.01.13**

### Lösung 1

a)
- $f(x) = x^2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x}$
- $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) - \ln(x^2) = -2 \cdot \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = (-2) \cdot \frac{1}{x}$

b)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(\neg P \wedge \neg Q)$ | $(P \wedge \neg R)$ | $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

die möglichen Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen sind somit:

$$\begin{aligned}(P,Q,R) &= (0,0,0)\\(P,Q,R) &= (0,0,1)\\(P,Q,R) &= (1,0,0)\\(P,Q,R) &= (1,1,0)\end{aligned}$$

### Lösung 2

a) $m = 1$ und $q = -1$, Graphik.

b)

$$f'(x) = \frac{9}{(x-2)^2} \qquad f'(5) = 1 \quad \text{Linearisierung } t\colon y = (x-5) - 3$$

also: $f(5.5) \approx -\frac{5}{2}$ und $f(5.5) = -\frac{18}{7}$ die Näherung ist etwas zu gross.

absoluter Fehler $\Delta = \left|\frac{18}{7} - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{14}$ und relativer Fehler $\frac{\Delta}{\frac{18}{7}} = \frac{1}{36}$

### Lösung 3

a) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Longrightarrow |a_n - a| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$, da 1 Promille $= 0.1$ Prozent $= 1$ Tausendstel

und damit $n > \frac{-3}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{\log(2) - \log(3)}$

b)

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \leq 12 \quad \Longrightarrow q \leq \frac{2}{3}$$

d.h. $q_{\text{max}} = \frac{2}{3}$.

**Lösung 4**

Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

und damit

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \qquad f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2$$

Nullstelle: $x = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$.
Wendepunkt $W_1(-1, 0)$:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & f''(-1) & = & 2a_2 - 6a_3 + 12a_4 \stackrel{!}{=} 0 \\ (2) & f(-1) & = & -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

Wendepunkt $W_2(1, 1)$:

$$\begin{array}{lrcl} (3) & f''(1) & = & 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 \stackrel{!}{=} 0 \\ (4) & f(1) & = & a_1 + a_2 1 a_3 + a_4 \stackrel{!}{=} 1 \end{array}$$

zu lösendes Gleichungssystem:

$$A \cdot a = b \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Endschema (Gauss–Algorithmus):

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | $-6$ | 10 | $-1$ |
| 0 | 0 | 0 | 20 | $-2$ |

$\Longrightarrow a_4 = -\frac{1}{10}$, $a_3 = 0$, $a_2 = \frac{3}{5}$ und $a_1 = \frac{1}{2}$ und damit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{5} \cdot x^2 - \frac{1}{10} \cdot x^4$$

**Lösung 5**

a) Fallunterscheidung für den Betrag:

$$x > 1\colon f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad x < 1\colon f(x) = -\frac{1}{1+x}$$

$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, $\mathbb{W}(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, \infty)$

$x = 1$ ist eine Sprungstelle, da $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$

$x = -1\colon$ Pol, es gibt keine NS, horizontale Asymptote: $y = 0 = x-$ Achse

Schnittpunkt mit der $y-$ Achse: $(-1, 0)$

Graphik

b) Faktorisierung des Nenners (Hornerschema, $x = 1$ ist NS des Nenners):

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1) \cdot (x^2 - 2x + 4)$$

es gibt keine weiteren reellen NS, also

Ansatz für die PBZ:

$$r(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4}$$

Koeffizientenvergleich für die Zähler:

$$x^2 + 4x - 1 \stackrel{!}{=} A \cdot (x^2 - 2x + 4) + (Bx + C) \cdot (x - 1)$$

$$\begin{aligned} x^2 : &\quad 1 &= A + B \\ x^1 : &\quad 4 &= -2A - B + C \\ x^0 : &\quad -1 &= 4A - C \end{aligned}$$

Endschema (Gauss–Algorithmus):

| $A$ | $B$ | $C$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 3 | 19 |

$\Longrightarrow C = \frac{19}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ und $A = \frac{4}{3}$

und schliesslich:

$$r(x) = \frac{\frac{4}{3}}{x-1} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x + \frac{19}{3}}{x^2 - 2x + 4}$$

**Lösung 6**

Volumen des Zylinders: $V = \frac{x^2}{4}\pi \cdot y$
Ähnlichkeit (Figur): $h : \frac{d}{2} = y : \left(\frac{d}{2} - \frac{x}{2}\right) \Longrightarrow y = \frac{h}{d} \cdot (d - x)$
und damit

$$V = V(x) = \frac{h}{d}\pi \cdot \frac{x^2}{4}(d - x) \stackrel{!}{=} \text{max} \qquad 0 \le x \le d$$

Ränder: $V(0) = V(d) = 0$

$$V'(x) = \frac{h}{d}\pi \cdot (x \cdot (-3x + 2d)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2d}{3}$$

also $x = \frac{2d}{3}$ und $y = \frac{h}{3}$ und damit

$$V_{\text{max}} = V\left(\frac{2d}{3}\right) = \frac{\pi h d^2}{27}$$