Klasse ST11b **MND2 Schlussprüfung** 27. Juni 2013

Name:

Hilfsmittel:	Formelsammlung, **eigene** Zusammenfassung und **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit:	120 Minuten.
Bewertung:	Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 101\dot{x} + 100x = 0 \qquad \text{AB: } x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0.99 \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Steifheit $S(t)$ des Systems in a).

c) Ab welchem Zeitpunkt darf die Schrittweite vergrössert werden, falls bei einer numerischen Approximation der Lösung 3 Dezimalen korrekt gerundet sein sollen.

d) Wie gross darf die Schrittweite h maximal sein, falls Sie mit Heun der Ordnung $p = 2$ rechnen?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{x^2}{t} \qquad x(1) = 1 \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (2).

b) Die Lösung von (2) soll mit Trapezmethode approximiert werden. Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie den ersten Schritt für $h = 0.2$ aus, Wurzel stehen lassen.

Aufgabe 3

Gegeben ist das Differentialgleichungssytem

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & y_2(x) - 1 \\ y_2'(x) & = & -200 \cdot y_1(x) - 201 \cdot y_2(x) + 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y_1(0) & = & 0.99 \\ y_2(0) & = & 1.00 \end{array}\right. \tag{3}$$

a) Schreiben Sie (3) in der Form

$$y'(x) = A \cdot y(x) + b \qquad y(0) = ?$$

b) Lösen Sie das System aus a) durch Entkopplung.

c) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit mit dem Verfahren "Euler explizit" die Lösung numerisch stabil bestimmt wird?

Welcher Term der Lösung ist verantwortlich für die Instabilität?

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{'''}(x) - y(x) = 0 \qquad \text{AB: } y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 1. \tag{4}$$

a) Schreiben Sie (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Das System in a) soll numerisch mit einem Runge–Kutta Verfahren der Ordnung $p = 3$ approximiert werden. Schreiben Sie den allgemeinen Schritt hin und führen Sie den ersten Schritt aus.

c) Ist das System in a) schwingungsfähig? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Wir betrachten ein Runge–Kutta Verfahren der Ordnung $p = 3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & b_{21} & & \\ \frac{1}{2} & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \tag{5}$$

a) Wie müssen Sie (5) vervollständigen, damit (5) die verlangte Ordnung hat?

b) Welches Runge–Kutta Verfahren der Ordnung $p = 2$ können Sie mit dem Verfahren aus a) adaptiv steuern, falls Sie das Prinzip der eingebetteten Verfahren verwenden möchten?

c) Geometrische Interpretation von (5) mit den Werten aus a).

Aufgabe 6

Gegeben ist ein System von gekoppelten Schwingungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'' & = & -a \cdot y_1' - b \cdot y_1 + \varepsilon \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_2'' & = & -c \cdot y_2' - d \cdot y_2 - \varepsilon \cdot y_1 \cdot y_2 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \end{array} \tag{6}$$

a) Schreiben Sie (6) mit Hilfe der Substitution

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & y_1 \\ z_2 & = & y_1' \\ z_3 & = & y_2 \\ z_4 & = & y_2' \end{array} \right.$$

um in ein Differentialgleichungssystem $z' = f(z)$ erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix des Systems in a).

c) Geben Sie für $\varepsilon = 0$ das charakteristische Polynom der Matrix aus b) an.

Viel Erfolg!

Lösung 1

a) Substitution

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{z} = Az \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -101 \end{pmatrix} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

b) EW von A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 + 101 \cdot \lambda + 100 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 100) \stackrel{!}{=} 0$$

also: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -100$ und damit

$$S(t) = S = \frac{\max |\mathrm{Re}(\lambda)|}{\min |\mathrm{Re}(\lambda)|} = 100$$

$S(t)$ ist konstant, da das System linear ist.

c) Genauigkeit: $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, also

$$e^{-100t} < \varepsilon \quad \Longrightarrow t > \frac{\ln(5 \cdot 10^{-4})}{-100} =: t_1 (= 0.076)$$

Für $t > t_1$ darf die Schrittweite vergrössert werden.

d) Stabilität: für λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ muss gelten:

$$-2 < h\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Longrightarrow 0 < h < \frac{-2}{-100} = \frac{1}{50}$$

Lösung 2

a) Separation

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{t} \quad \Longrightarrow -\frac{1}{x} = \ln(t) + C \quad \Longrightarrow x_h(t) = -\frac{1}{\ln(t) + C}$$

Anfangsbedingung:

$$x(1) = 1 = -\frac{1}{\ln(1) + C} \quad \Longrightarrow C = -1$$

und damit

$$x(t) = \frac{1}{1 - \ln(t)} \qquad 1 \le t < e$$

($t = e$ ist ein Pol für die Lösung).

b) Trapezmethode:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{2} \cdot (f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})) \\ &= x_k + \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{x_k^2}{t_k} + \frac{x_{k+1}^2}{t_{k+1}} \right) \end{aligned}$$

und damit

(7) $$-\frac{h}{2} \cdot \frac{x_{k+1}^2}{t_{k+1}} + x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} \cdot \frac{x_k^2}{t_k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(7) ist eine quadratische Gleichung für die Unbekannte x_{k+1}, d.h. x_{k+1} kann elementar bestimmt werden. Erster Schritt für $h = 0.2$: $t_0 = 1$, $x_0 = 1$, $t_1 = 1.2$ gesucht ist x_1

$$(-0.1) \cdot \frac{x_1^2}{1.2} + x_1 = 1.1$$

obige Gleichung mal (-12) ergibt:

$$x_1^2 - 12x_1 + 13.2 = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = 6 \pm \sqrt{22.8}$$

da $x(1) = 1$ und x_1 eine Approximation für $x(1.2)$ ist, ist in obiger Formel das untere Vorzeichen zu nehmen, also $x_1 = 6 - \sqrt{22.8} \approx x(1.2)$

Lösung 3

a)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -201 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

b) EWP von A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 201 \cdot \lambda + 200 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 200) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -200$$

Eigenvektoren:

$$v^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \end{pmatrix} \ k = 1, 2$$

und damit

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-200x} \begin{pmatrix} 1 \\ -200 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

partikuläre Lösung (Ansatz gemäss Tabelle Papula):

$$y_p(x) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -201 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daraus $k_2 = 1$ und $k_1 = -1$ (ist überflüssig, da $b = \mu \cdot v^{(1)}$).
Schliesslich

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-200x} \begin{pmatrix} 1 \\ -200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Anfangsbedingungen:

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.00 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Endschema (Gauss–Algorithmus):

c_1	c_2	1
1	1	1.99
0	-199	1.99

$\Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{100}$, und $c_1 = 2$, also

$$y(x) = 2 \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{100} \cdot e^{-200x} \begin{pmatrix} 1 \\ -200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0$$

c) Stabilität: für λ mit $\text{Re}(\lambda) < 0$ muss gelten:

$$-2 < h\text{Re}(\lambda) < 0 \Longrightarrow 0 < h < \frac{-2}{-200} = \frac{1}{100}$$

Der Summand mit dem Faktor e^{-200x} ist für die Instabilität verantwortlich.

Lösung 4

a) Substitution:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Longrightarrow z' = Az \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$z^{(k+1)} = \left(I_3 + \frac{hA}{1!} + \frac{h^2A^2}{2!} + \frac{h^3A^3}{3!}\right) \cdot z^{(k)} = R(hA) \cdot z^{(k)}$$

wobei $R(hA) =$ Taylorpolynom $3-$ ten Grades von e^{hA}, ($R(.) =$ Stabilitätsfunktion des Verfahrens) mit

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \cdot A = I_3$$

erhalten wir

$$R(hA) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^3}{6} & h & \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^2}{2} & 1 + \frac{h^3}{6} & h \\ h & \frac{h^2}{2} & 1 + \frac{h^3}{6} \end{pmatrix}$$

erster Schritt:

$$z^{(1)} = R(hA) \cdot z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^3}{6} & h & \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^2}{2} & 1 + \frac{h^3}{6} & h \\ h & \frac{h^2}{2} & 1 + \frac{h^3}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^3}{6} - h + \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^2}{2} - 1 - \frac{h^3}{6} + h \\ h - \frac{h^2}{2} + 1 + \frac{h^3}{6} \end{pmatrix}$$

c) EW von A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = -\lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2.3} = -\frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$3-$ te Einheitswurzeln, d.h. das System in a) ist schwingungsfähig, da A konjugiert komplexe EW hat. Frequenz $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Im}(\lambda_2)$.

Lösung 5

a) (5) muss wie folgt vervollständigt werden:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{array}$$

da $a_2 = \frac{1}{3}$ und $a_3 = \frac{1}{2}$ und damit

$$c_2 = \frac{3a_3 - 2}{6a_2(a_3 - a_2)} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{2 \cdot \frac{1}{6}} = -\frac{3}{2} \quad c_3 = \frac{2 - 3a_2}{6a_3(a_3 - a_2)} = \frac{2 - 1}{3 \cdot \frac{1}{6}} = 2$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3 = \frac{1}{2} \qquad b_{32} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{c_3} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow b_{31} = \frac{1}{4}$$

b) Das Verfahren 2− ter Ordnung ist ($a_3 = c_3 = 0$):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

da

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 1 \\ a_2 \cdot c_2 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

erfüllt sein muss.

c) Figur, Einheiten nicht zu klein

Lösung 6

a) Substitution

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -a \cdot z_2 - b \cdot z_1 + \varepsilon \cdot z_1 z_3 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= -c \cdot z_4 - d \cdot z_3 - \varepsilon \cdot z_1 z_3 \end{cases} \Longrightarrow z' = f(z)$$

b)

$$J(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right) \quad 1 \le i, j \le 4 \qquad J(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b + \varepsilon z_3 & -a & \varepsilon z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon z_3 & 0 & -d - \varepsilon z_1 & -c \end{pmatrix}$$

c)

$$J(z)\Big|_{\varepsilon=0} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & -c \end{array}\right) \quad \text{Blockstruktur}$$

und damit

$$p_J(\lambda) = (\lambda^2 + a\lambda + b) \cdot (\lambda^2 + c\lambda + d)$$