Klasse ST11b **MND2 erster Test** 28. März 2013

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 1 \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta. \tag{1}$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Diffenerentialgleichungssystems aus a).

c) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Lösung für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 2

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Lösen Sie (2) durch Entkopplung.

b) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.

c) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.

d) Geben Sie den stabilen bzw. den instabilen Unterraum an.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + y = 3 \cdot \cos(\omega t) \qquad \delta > 0 \tag{3}$$

- Wie gross muss δ sein, damit die Resonanzfrequenz $\omega_r = \frac{1}{2}$ wird? Wie gross ist ω_0?
- Wie gross wird die zugehörige Frequenz ω_δ ?
- Wie gross wird mit ω_r die maximale Amplitude der partikulären Lösung?

b) Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = 2e^{-t}\left\{\left[a_1\cos(\sqrt{2}t) - b_1\sin(\sqrt{2}t)\right]u^{(1)} - \left[a_1\sin(\sqrt{2}t) + b_1\cos(\sqrt{2}t)\right]w^{(1)}\right\},$$

wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ gegeben.

Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A an. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. Bestimmen Sie A.

ST11b MND2 Lösungen erster Test 28.03.13

Lösung 1

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und den AB $z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ansatz für $z_p(t) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, gemäss Tabelle, z.B. Papula

damit, nach einsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot z_p(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow z_p(t) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$z_a(t) = z_h(t) + z_p(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Bestimmung der Konstanten mit den AB: $c_1 = \frac{1}{6}\left(2\alpha + \beta + \frac{1}{4}\right)$ und $c_2 = \frac{1}{6}\left(4\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)$:
$c_1 = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha + \beta + \frac{1}{4} = 0$.

Lösung 2

a) EWP von A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$x_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) $x_{\text{neu}_1} = c_1 e^{2t}$, $x_{\text{neu}_2} = c_2 e^{-t}$, also $x_{\text{neu}_1} \cdot x_{\text{neu}_2}^2 = c_1 \cdot c_2^2$ und damit

$$x_{\text{neu}_1} = c_1 \cdot c_2^2 \cdot \frac{1}{x_{\text{neu}_2}^2} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Graphik

c) Graphik

d) instabiler UR: $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ und stabiler UR: $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Lösung 3

a) es gilt allgemein: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$

$\omega_0 = 1$, $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, also $\omega_r^2 = \frac{1}{4} = 1 - 2\delta^2 \Longrightarrow \delta^2 = \frac{3}{8}$ und $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, da $\delta > 0$.

$C_{\mathsf{max}} = C(\omega_r) = \frac{F_0}{2\delta\omega_\delta}$ mit $F_0 = 3$ und $\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

erhalten wir $C_{\mathsf{max}} = \frac{12}{\sqrt{15}}$

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$, Spur$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -2$, det$(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Da $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \mu \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ muss in A das Element $a_{11} = 0$ sein.

Lösung 4

a) $y' = k \Longrightarrow y(x) = -x(2k+1) - k$

Die Isoklinen sind Geraden mit der Steigung $m = -(2k+1)$ und dem $y-$ Achsenabschnitt $q = -k$.

b) $y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y_H(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$. Mit der AB folgt: $C = 5$, also $y(x) = \sqrt{5 - x^2}$

Dgl. der orthogonalen Trajektorien: $y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow y_H(x) = Cx$, mit der AB folgt $C = 1$ und damit für die orthogonale Trajektorie: $y = x$.

Grafik

Lösung 5

a) Ableiten und einsetzen.

$$y'(x) = \frac{C \cdot 75 \cdot e^{-15x}}{(1 + C \cdot e^{-15x})^2}$$

b) $y_0 = \frac{5}{2}$

Lösung 6

- erster Schritt: Separation der Variablen

  $y_H(x) = C \cdot \cos(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

- zweiter Schritt: Variation der Konstanten

  $y_P(x) = C(x) \cdot \cos(x)$, einsetzen $\Longrightarrow C(x) = \tan(x)$

- dritter Schritt: allgemeine Lösung

  $y_A(x) = y_H(x) + y_P(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

  Bestimmung von C mit der AB: $C = -1$, also $y(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.