Klasse ST11b **MND2 zweiter Test** 16. Mai 2013

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y' = y - x^2 + 1 \qquad 0 \le x \le 2 \qquad y(0) = y_0 = 0.5$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Die Lösung von (1) soll mit der Methode der Taylorreihe numerisch approximiert werden. Bestimmen Sie die entsprechenden Koeffizienten c_k bis und mit Ordnung $p = 4$.

c) Können Sie in b) ein allgemeines Bildungsgesetz ablesen?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2) \qquad (1 + x^2) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 1 - x^2 \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

a) Schreiben Sie (2) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

b) Die Lösung von (2) soll mit der Methode "Euler explizit" numerisch approximiert werden. Formulieren Sie den allgemeinen Schritt und führen Sie den ersten Schritt für $h = 0.1$ aus.

Aufgabe 3

Student "Drei"stein schlägt das folgende Verfahren mit

$$(3) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

vor. Er behauptet, dass (3) von der Ordnung $p = 2$ sei.

a) Ist seine Behauptung richtig? Ist das Verfahren so gut wie Euler explizit?

b) Würden Sie (3) verwenden? Wenn nein, wie müsste (3) modifiziert werden?

Beantworten Sie obige Fragen mit dem Testbeispiel $y'(x) = \lambda \cdot y(x)$ und $y(0) = 1$.

ST11b MND2 Lösungen zweiter Test 16.05.13

Lösung 1

Es handelt sich bei (1) um eine lineare Dgl, Tabelle Papula für einen Ansatz für $y_p(x)$ darf verwendet werden

a)
$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^x + a_0 + a_1x + a_2x^2$$

einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert

$$y_a = ce^x + (x+1)^2 \qquad x \geq 0$$

Bestimmung von c mit der AB:

$$y(x) = -0.5 \cdot e^x + (x+1)^2 \qquad x \geq 0$$

b) Entwicklung um (x_k, y_k) mit $x = x_k + h$ und $h = x - x_k$

$$\begin{array}{lrcl}
(4) & y(x) & = & y_k + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \ldots \\
(5) & y'(x) & = & c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \ldots
\end{array}$$

(4) und (5) in (1) einsetzen und Koeffizientenvergleich nach Potenzen in h liefert:

$$\begin{aligned}
c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \ldots &= y_k + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \ldots - (x_k+h)^2 + 1 \\
&= y_k + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \ldots - x_k^2 - 2x_kh - h^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcll}
h^0: & c_1 & = & y_k - x_k^2 + 1 & \\
h^1: & 2c_2 & = & c_1 - 2x_k & c_2 = \frac{1}{2}y_k - \frac{1}{2}x_k^2 + \frac{1}{2} - \frac{2x_k}{2} \\
h^2: & 3c_3 & = & c_2 - 1 & c_3 = \frac{1}{6}y_k - \frac{1}{6}x_k^2 - \frac{1}{6} - \frac{2x_k}{6} \\
h^3: & 4c_4 & = & c_3 & c_4 = \frac{1}{24}y_k - \frac{1}{24}x_k^2 - \frac{1}{24} - \frac{2x_k}{24}
\end{array}$$

c) c_1 widerspiegelt die Methode von Euler explizit.

$$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(y_k - x_k^2 - 1 - 2x_k\right) \qquad k \geq 3$$

Lösung 2

a) Substitution

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & \frac{1}{1+x^2} \cdot z_1 - \frac{x}{1+x^2} \cdot z_2 + \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}\right.$$

also

$$z' = A(x) \cdot z + g(x) \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \; A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & -\frac{x}{1+x^2} \end{pmatrix} \; g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{pmatrix} \; z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Euler explizit: $z^{(k)}$ = numerische Approximation für $z(x_k)$, $x_k = x_0 + kh$, wobei $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} z^{(k+1)} &= z^{(k)} + hf(x_k, z^{(k)}) \\ &= z^{(k)} + h \cdot \Big(A(x_k) \cdot z^{(k)} + g(x_k) \Big) \\ &= z^{(k)} + h \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1+x_k^2} & -\frac{x_k}{1+x_k^2} \end{pmatrix} \cdot z^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-x_k^2}{1+x_k^2} \end{pmatrix} \right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

erster Schritt: $x_0 = 0$ und $x_1 = h = 0.1$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + h \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z^{(0)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 1+2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

zweiter Schritt: $x_1 = h$ und $x_2 = 2h = 0.2$

$$z^{(2)} = z^{(1)} + h \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1+h^2} & -\frac{h}{1+h^2} \end{pmatrix} \cdot z^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-h^2}{1+h^2} \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung 3

a) Mit dem vorgeschlagenen Verfahren erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(6) \qquad & k_1 &= \lambda y_k \\ &(7) \qquad & k_2 &= \lambda(y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1) = \lambda y_k + \frac{h}{3}\lambda^2 y_k \\ &(8) \qquad & y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4} \cdot \{2k_1 + k_2\} = \left(1 + \frac{3h}{4}\lambda + \frac{h^2}{12}\lambda^2\right) y_k \end{aligned}$$

Euler explizit: $y_{k+1} = (1 + h\lambda)y_k$.
Mit (8) folgt, dass (3) schlechter ist als die Methode von Euler!
(3) sollte nicht verwendet werden!

b) Aus der Theorie wissen wir:

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= h\, f\, \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F\, \left\{\frac{1}{2} - a_2c_2 - a_3c_3\right\} \\ &\quad + h^3\, \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2c_3b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2c_3]\right\} + O(h^4) \end{aligned}$$

Zweistufiges Verfahren: $a_3 = c_3 = 0$:
Also sollten die beiden folgenden Gleichungen

$$1 = c_2 + c_2 \qquad \frac{1}{2} = a_2c_2$$

gelten und damit mit obiger Wahl von a_2: $c_2 = \frac{3}{2}$ und $c_1 = -\frac{1}{2}$.
Auf diese Weise hätte (3) die Fehlerordnung $p = 2$.