Klasse ST12a **MAE2 Schlussprüfung** 19. Juni 2013

Name:

Hilfsmittel: Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit: 120 Minuten.
Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Kurve

$$y = f(x) = 2 \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

über dem Intervall $[-1, 1]$.

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks.

b) Das Kurvenstück wird um die $x-$ Achse rotiert. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$$

a) Skizzieren Sie die Kurve $y = f(x)$. Bestimmen Sie dazu die Nullstellen, Intervalle, in denen $f(x) \geq 0$, bzw. $f(x) \leq 0$, sowie das Verhalten der Funktion für $x \longrightarrow \infty$.

b) Bestimmen Sie die gesamte Fläche, die die Funktion mit der $x-$ Achse über dem Intervall $[0, \infty)$ einschliesst.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie $x \neq 0$ aus der Gleichung

$$\sin(x) = \frac{3}{4} \cdot x \qquad (1)$$

indem Sie für $\sin(x)$ das Taylorpolynom $3-$ ten Grades verwenden.

Stellen Sie zuerst die linke und rechte Seite von (1) im selben Koordinatensystem graphisch dar.

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

in eine Taylorreihe mit Entwicklungszentrum $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Geben Sie die ersten 5 Summanden an (Taylorpolynom f_4 vom Grad 4).

bitte wenden

Aufgabe 4

Die beiden Kurven $y = f_1(x) = -2x^2 + 2$ und $y = f_2(x) = x^2 - 1$ begrenzen ein endliches Flächenstück.

a) Graphische Darstellung der gegebenen Situation.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A dieses Flächenstücks.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S dieses Flächenstücks.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie das bestimmte Integral

$$I_a = \int_3^5 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$$

mit Hilfe der Substituion $u = x^2 - 1$.

b) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$I_b = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Aufgabe 6

a) Entwickeln Sie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$$

in eine Taylorreihe mit $x_0 = 0$ und geben Sie die ersten 6 Terme an.

b) Bestimmen Sie

$$I = \int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$$

mit Hilfe von a) auf 5 Dezimalen genau. Wieviele Summanden sind dazu nötig?

Lösung 1

a)

$$f'(x) = 3 \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}} \qquad [f'(x)]^2 = 9 \cdot (x+1) \qquad \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{10+9x}$$

also

$$L = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{10+9x}\, dx = \frac{1}{9} \cdot \int\limits_{1}^{19} \sqrt{u}\, du = \frac{2}{27} \cdot (19\sqrt{19} - 1)$$

wobei $u := 10 + 9x$ mit $dx = \frac{du}{9}$

b) Sei $V_x =$ das Volumen, das bei Rotation um die $x-$ Achse entsteht.

$$V_x = \pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} [f(x)]^2\; dx = 4\pi \cdot \int\limits_{-1}^{1} (x+1)^3\, dx = 4\pi \cdot \left. \frac{(x+1)^4}{4} \right|_{-1}^{1} = 16\pi$$

Lösung 2

a)

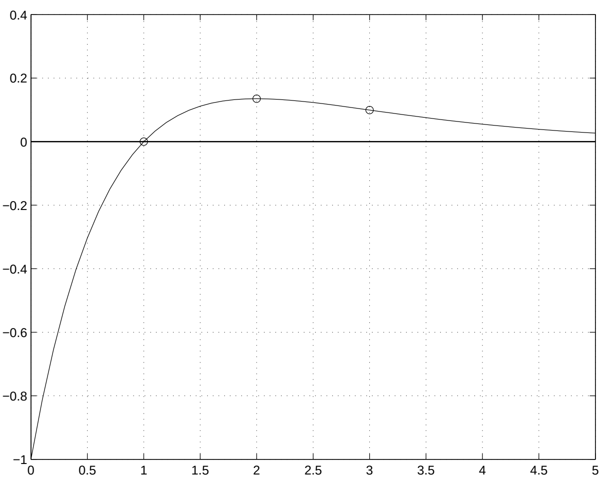

Abbildung 1: Flächenstücke berandet von $y = f(x)$ und der $x-$ Achse
`figuren_sep_2013.m`

- $f(0) = -1$, $x = 1$ ist einfache NS,
- $f(x) \leq 0$ auf $[0,1]$ und $f(x) \geq 0$ auf $[1,\infty)$
- f hat ein globales Maximum bei $x = 2$ mit $f(2) = e^{-2}$, $f'(x) = (2-x) \cdot e^{-x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, d.h. die $x-$ Achse ist horizontale Asymptote
- f hat einen Wendepunkt bei $x = 3$ mit $f(3) = 2 \cdot e^{-3}$, $f''(x) = (x-3) \cdot e^{-x}$

b) erste Teilfläche (mit partieller Integration):

$$\begin{aligned} A_1 = \int_0^1 -f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(-x \cdot e^{-x} + e^{-x}\right)\,dx \\ &= -\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

zweite Teilfläche (mit partieller Integration):

$$A_2 = \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty (x-1) \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda (x-1) \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\begin{aligned} \int_1^\lambda (x-1) \cdot e^{-x}\,dx &= \int_1^\lambda x \cdot e^{-x}\,dx - \int_1^\lambda e^{-x}\,dx \\ &= -x \cdot e^{-x}\Big|_1^\lambda + \int_1^\lambda e^{-x}\,dx - \int_1^\lambda e^{-x}\,dx \\ &= -\lambda \cdot e^{-\lambda} + e^{-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} -\lambda \cdot e^{-\lambda} = -\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} \overset{\text{Bernoulli}}{=} \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$$

also $A_2 = e^{-1}$ und $A = A_1 + A_2 = \frac{2}{e}$

Lösung 3

a)

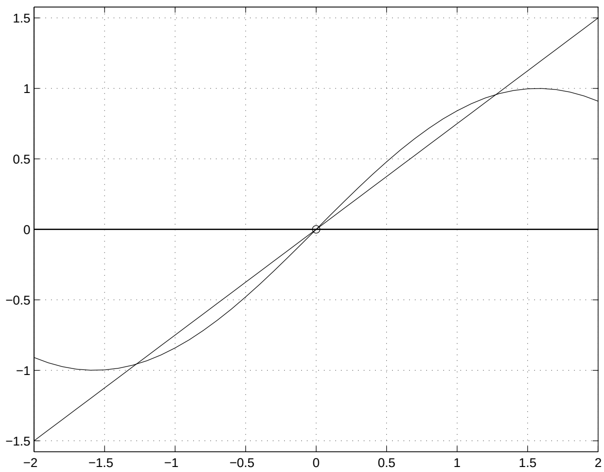

Abbildung 2: Nicht–lineare Gleichung
`figuren_sep_2013.m`

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} = \frac{3}{4} \cdot x \quad \Longrightarrow 0 = x \cdot \left(\frac{x^2}{6} - \frac{1}{4}\right) \Longrightarrow x_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

b)

$$
\begin{array}{rcl}
 & & x_0 = \frac{\pi}{2} \\
f(x) = f^{(0)}(x) = & x \cdot \sin(x) & f^{(0)}(x_0) = \frac{\pi}{2} \\
f'(x) = f^{(1)}(x) = & \sin(x) + x \cdot \cos(x) & f^{(1)}(x_0) = 1 \\
f''(x) = f^{(2)}(x) = & 2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x) & f^{(2)}(x_0) = -\frac{\pi}{2} \\
f^{(3)}(x) = & -3 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x) & f^{(3)}(x_0) = -3 \\
f^{(4)}(x) = & -4 \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) & f^{(4)}(x_0) = \frac{\pi}{2} \\
f^{(5)}(x) = & 5 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) & f^{(5)}(x_0) = 5 \\
f^{(6)}(x) = & \dots & \dots
\end{array}
$$

und damit

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\frac{\pi}{2}}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{3}{3!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + - \dots$$

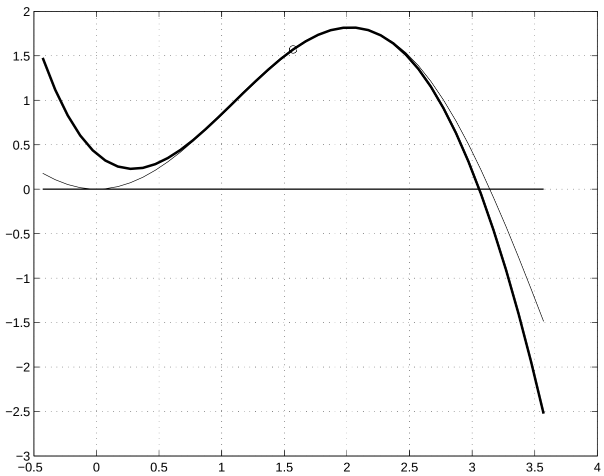

Abbildung 3: dünne Linie: $y = f(x)$, dicke Linie: Taylorpolynom $y = f_4(x)$
`figuren_sep_2013.m`

Lösung 4

a) Graphik

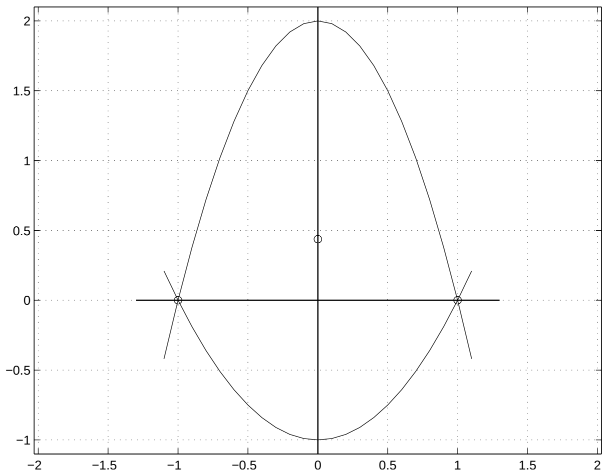

Abbildung 4: Flächenstück symmetrisch zur $y-$ Achse
`figuren_sep_2013.m`

b) obere Berandung $f_o(x) = -2x^2 + 2$ und untere Berandung $f_u(x) = x^2 - 1$ von A
(beide Funktionen sind gerade)

$$A = 2 \cdot \int\limits_0^1 (f_o(x) - f_u(x))\, dx = 2 \cdot \int\limits_0^1 (-3x^2 + 3)\, dx = 2 \cdot (-x^3 + 3x)\Big|_0^1 = 4$$

c) $x_S = 0$ aus Symmetriegründen, also $S(0, y_S)$:

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot 2 \cdot \int\limits_0^1 \left([f_o(x)]^2 - [f_u(x)]^2\right)\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_0^1 \left((-2x^2 + 2)^2 - (x^2 - 1)^2\right)\, dx$$

$$y_S = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_0^1 \left(3x^4 - 6x^2 + 3\right)\, dx = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 3x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{16}$$

Lösung 5

a)

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad dx = \frac{du}{2x} \quad \Longrightarrow I_a = \int\limits_8^{24} \frac{u+1}{2\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_8^{24} \left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)\, du = \left(\frac{1}{3} \cdot u\sqrt{u} + \sqrt{u}\right)\Bigg|_8^{24}$$

also $I_a = 18\sqrt{6} - \frac{22}{3}\sqrt{2}$

b)

$$u := e^x \Longrightarrow dx = \frac{du}{u} \Longrightarrow I_b = \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$$

Lösung 6

a) Binomialreihe für $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot x^k \\
&= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} \cdot x^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{4} \cdot x^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{5} \cdot x^5 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3 + \frac{5 \cdot 7}{2^7} \cdot x^4 - \frac{7 \cdot 9}{2^8} \cdot x^5 + - \ldots
\end{aligned}
$$

denn die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten sind:

$$
\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{1} &= \frac{(-\frac{1}{2})}{1} = -\frac{1}{2} \\
\binom{-\frac{1}{2}}{2} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{2 \cdot 1} = \frac{3}{8} \\
\binom{-\frac{1}{2}}{3} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{5}{16} \\
\binom{-\frac{1}{2}}{4} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2})}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 7}{2^7} \\
\binom{-\frac{1}{2}}{5} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2}) \cdot (-\frac{9}{2})}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{7 \cdot 9}{2^8}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{0.1} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3 + \frac{5 \cdot 7}{2^7} \cdot x^4 - \frac{7 \cdot 9}{2^8} \cdot x^5 + - \ldots\right) dx \\
&= \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{5}{16} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{5 \cdot 7}{2^7} \cdot \frac{x^5}{5} - + \ldots\right) \Bigg|_0^{0.1} \\
&= 0.1 - \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{8} \cdot 10^{-3} - \frac{5}{64} \cdot 10^{-4} + \frac{7}{128} \cdot 10^{-5} - + \ldots
\end{aligned}
$$

Genauigkeit: $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ damit 5 Dezimalen korrekt gerundet sind, d.h. die ersten 4 Summanden sind notwendig, da $\frac{7}{128} \cdot 10^{-5} < \varepsilon$.
Also $I \approx 0.1 - \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{8} \cdot 10^{-3} - \frac{5}{64} \cdot 10^{-4}$