Klasse ST12a **MAE2 erster Test** 12. April 2013

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x^2 \cdot e^{2x}$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} 4x^2 \cdot e^{2x}\, dx$$

c) Stellt die in b) erhaltene Zahl einen Flächeninhalt dar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das Integral

$$I = \int \frac{x^3 + 4x - 2}{x^3 - 3x + 2}\, dx$$

Aufgabe 3

Die Kurve

$$y = f(x) = -x^2 + 3x$$

schliesst zusammen mit der $x-$ Achse im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Dieses Flächenstück wird durch die Gerade $y = 2$ in zwei Teile zerlegt.

a) Graphische Darstellung der gegebenen Situation.

b) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilstücke.

MAE2 Lösungen erster Test 12.04.13

Lösung 1

a) zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} 4\int x^2e^{2x}\,dx &= 4x^2\frac{1}{2}e^{2x} - 4\int xe^{2x}\,dx \\ &= 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + 2\int e^{2x}\,dx \\ &= e^{2x}\left\{2x^2 - 2x + 1\right\} + C \end{aligned}$$

b)

$$4\int_{-1}^{1} x^2e^{2x}\,dx = e^{2x}\left\{2x^2 - 2x + 1\right\}\Big|_{-1}^{1} = e^2 - 5\cdot e^{-2} > 0$$

c)
- Es handelt sich um einen Flächeninhalt, da $f(x) \geq 0$ für $-1 \leq x \leq 1$.
- $x = 0$ ist doppelte NS, d.h. in $(0, 0)$ haben wir eine horizontale Tangente.

Lösung 2

Polynomdivision

$$\frac{x^3 + 4x - 2}{x^3 - 3x + 2} = 1 + \frac{7x - 4}{x^3 - 3x + 2}$$

Hornerschema (NS des Nenners):

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$$

Ansatz für die PBZ:

$$\frac{7x - 4}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} x^2: & 0 & = & A & & & + & C \\ x^1: & 7 & = & A & + & B & - & 2C \\ x^0: & -4 & = & -2A & + & 2B & + & C \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2, B = 1, C = -2$$

und damit:

$$I = x + \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x+2}\right)dx = x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 2\ln|x+2| + C$$

Lösung 3

a) graphische Darstellung

b) Gesamtfläche

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

Schnittstellen von $y = 2$ und $y = f(x)$: $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

Teilfläche

$$A_1 = \int_1^2 (f(x) - 2)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6}$$

Teilfläche

$$A_2 = A - A_1 = \frac{26}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{26}$$