Klasse ST12a **MAE2 zweiter Test** 17. Mai 2013

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \int\limits_0^x \frac{2t - t^2}{t - 3}\, dt$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema dieser Funktion.

b) Gesucht ist der folgende Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + x^2 \cdot e^x}{x - \sin(x)}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie das gegebene Integral mit Hilfe einer geeigneten Substitution

$$I = \int \frac{8x - 2}{(6x^2 - 3x + 3)^3}\, dx$$

b) Bestimmen Sie die gesamte Fläche, welche die Kurve

$$y = f(x) = \frac{2}{x(x+1)}$$

mit der $x-$ Achse über dem Intervall $[1, \infty)$ einschliesst.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Kurve

$$y = f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

Das Kurvenstück über dem Intervall $[1, \sqrt{2}]$ wird um die $x-$ Achse rotiert. Dabei entsteht ein Körper.

a) Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

b) Bestimmen Sie die *gesamte* Oberfläche (Mantel– und Seitenflächen) des entstehenden Körpers.
Tipp: Mantelfläche mit geeigneter Substitution

MAE2 Lösungen zweiter Test 17.05.13

Lösung 1

a)

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} - x - 3 \cdot \ln|x-3| + 3 \cdot \ln(3)$$

$$g'(x) = -x - 1 - 3 \cdot \frac{1}{x-3} \stackrel{!}{=} 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

und damit:

- lokales Maximum: $(0, 0)$
- lokales Minimum: $(2, -4 + 3\ln(3))$

b) dreimalige Anwendung von Bernoulli– l'Hôpital liefert den Grenzwert 6:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x^2 \cdot e^x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2 + 2 \cdot e^x + 4x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6 \cdot e^x + 6x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x}{\cos(x)} = 6\end{aligned}$$

Lösung 2

a) $u(x) = 6x^2 - 3x + 3$ und damit

$$I = \frac{2}{3} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{3u^2} + C = -\frac{1}{3(6x^2 - 3x + 3)^2} + C$$

b) PBZ von f:

$$y = f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$A = \int_1^\infty \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right) dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_1^\lambda \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right) dx = 2 \cdot \lim_{\lambda\to\infty} \left|\frac{x}{x+1}\right| \Bigg|_1^\lambda = 2 \cdot \ln(2)$$

Lösung 3

a)

$$V = \pi \int_1^{\sqrt{2}} r^2(x)\, dx = \frac{\pi}{9} \int_1^{\sqrt{2}} x^6\, dx = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{x^7}{7}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{63} \cdot (8\sqrt{2} - 1)$$

b) Oberfläche $= M + D + G$, wobei $M =$ Mantelfläche, Deckfläche $D = \pi \cdot \frac{1}{9}$ für $x = 1$ und Grundfläche $G = \pi \cdot \frac{8}{9}$ für $x = \sqrt{2}$.

$$M = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{6} \int_2^5 \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{9} \cdot u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5 = \frac{\pi}{9} \cdot (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$$

Substitution: $u(x) = 1 + x^4 \implies du = 4x^3 dx$

Also: Gesamtoberfläche $= \frac{\pi}{9} \cdot (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) + \pi$