Klasse ST13a **MAE1 erster Test** 21. Oktober 2013

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Summe

$$s = \sum_{k=1}^{21} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{24} \frac{1}{k-2}$$

b) Gegeben ist die Funktion

$$y = g(x) = \frac{1}{16} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}$$

- Bestimmen Sie den Formfaktor sowie den Verschiebungsvektor bezüglich einer möglichst einfachen Grundfunktion.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve $y = g(x)$ mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 2

Zerlegen Sie die gegebene Funktion

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x^2} + 1$$

in umkehrbare Teilfunktionen.

- Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen mit ihren Definitions – und Wertebereichen.
- Graphische Darstellung jeder Teilfunktion mit ihrer Umkehrfunktion,
  (Einheiten auf beiden Achsen: 2 Häuschen).

Aufgabe 3

a) $y = f(x) = |1 - |x+1||$, $x \in [-5, 5]$.

- Schreiben Sie die Funktion $y = f(x)$ mit Hilfe von Fallunterscheidungen ohne Beträge.
- Stellen Sie anschliessend $y = f(x)$ im Intervall $[-5, 5]$ graphisch dar.
  Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen.

b) Bestimmen Sie die folgenden Summen:

- $s = \sum\limits_{k=-4}^{1} \max\left(20k, k+3, k^2, k^3\right)$
- $s = \sum\limits_{j=1}^{20} \left|4 - \frac{j}{2}\right|$

Aufgabe 4 *evtl.??*

a) $s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a-1)a^k$

b) Gegeben sind $a_n = \frac{4n}{2n-1}$ $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$

- Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ für $n \longrightarrow \infty$.
- Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl N so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N$.

Aufgabe 5 *evtl.??*

Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + c$, wobei $c > 0$.

a) Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $y = f(x)$ durch den Nullpunkt, sowie ihre Berührungspunkte.

b) Wie weit sind die Berührungspunkte voneinander entfernt?

c) graphische Darstellung
Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen

Aufgabe 6 *evtl.??*

a) Schreiben Sie s mit dem Summenzeichen

$$s = 1 - \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3\,x - 3 \cdot 4\,x^2 + 4 \cdot 5\,x^3 - 5 \cdot 6\,x^4 \pm \ldots\right)$$

mit $n+1$ Summanden.

b) $y = f(x) = |1 - |x+1||$, $x \in [-5, 5]$.

- Schreiben Sie die Funktion $y = f(x)$ mit Hilfe von Fallunterscheidungen ohne Beträge.
- Stellen Sie anschliessend $y = f(x)$ im Intervall $[-5, 5]$ graphisch dar.
  Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen.

Aufgabe 7 *evtl.??*

$$\text{Gegeben:} \quad \sum_{k=1}^{20} (5x_k - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=-1}^{18} (4x_{i+2} - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht:} \quad s = \sum_{k=1}^{20} \left\{ 2x_k - 3 \cdot \sum_{j=2}^{21} (-x_{j-1} + 1)^2 \right\}$$

MAE1 Lösungen erster Test 21.10.13

Lösung 1

a) mit einem Index-Shift in der zweiten Summe

$$s=\sum_{k=1}^{21}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=0}^{20}\frac{1}{k+2}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{23}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{22}\right)=\frac{1}{23}-\frac{1}{2}=-\frac{21}{46}$$

b)
- Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

  $$y=g(x)=\frac{1}{16}\cdot(x+4)^2-\frac{3}{4}$$

  also Formfaktor $a=\frac{1}{16}$ und die Verschiebung $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

  Die Grundfunktion ist $y=f(x)=x^2$.
- Schnittpunkt mit der $y-$ Achse: $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, Schnittpunkte mit der $x-$ Achse $(-4\pm 2\sqrt{3},0)$.

Lösung 2

Die gegebene Funktion ist ein Halbkreis mit Mittelpunkt $M(0,1)$ und Radius $r=3$:
Teilfunktionen:

- f_1: $[0,3]\longrightarrow[1,4]$, also $\mathbb{D}(f_1)=[0,3]$ und $\mathbb{W}(f_1)=[1,4]$
- f_2: $[-3,0]\longrightarrow[1,4]$, also $\mathbb{D}(f_2)=[-3,0]$ und $\mathbb{W}(f_2)=[1,4]$

mit den zugehörigen Umkehrfunktionen:

$$f_1^{-1}(x)=\sqrt{9-(x-1)^2}\qquad\mathbb{D}(f_1^{-1})=[1,4]\qquad\mathbb{W}(f_1^{-1})=[0,3]$$

und

$$f_2^{-1}(x)=-\sqrt{9-(x-1)^2}\qquad\mathbb{D}(f_2^{-1})=[1,4]\qquad\mathbb{W}(f_2^{-1})=[-3,0]$$

Graphik.

Lösung 3

a)
- erster Fall $1+x\geq 0$: $x\geq -1$ also $|1-(1+x)|=|-x|=|x|$
  a) $x\geq 0$: $y=x$, falls $0\leq x$
  b) $x<0$: $y=-x$, falls $-1\leq x<0$
- zweiter Fall $1+x<0$: $x<-1$ also $|1-(-1-x)|=|2+x|$
  a) $x+2\geq 0$: $x\geq -2$, somit $y=2+x$, falls $-2\leq x<-1$
  b) $x+2<0$: $x<-2$, somit $y=-2-x$, falls $-5\leq x<-2$

graphische Darstellung

b)
- $s=16+9+4+2+3+20=54$
- $$s=\sum_{j=1}^{7}\left(4-\frac{j}{2}\right)+\sum_{j=9}^{20}\left(\frac{j}{2}-4\right)=53$$

Lösung 4 *alt*

a) $y = mx$, wobei $m_{1.2} = \pm 2 \cdot \sqrt{c}$ mit den Berührungspunkten $B_{1.2} = (\pm\sqrt{c}/2c)$

b) Abstand $d = 2 \cdot \sqrt{c}$

c) Graphik

VS

Lösung 5 *alt*

a) 1. Fall a) $x \geq 2$ und $y \geq -1$, $g_a: \ x - y \geq 4$
1. Fall b) $x \geq 2$ und $y < -1$, $g_b: \ x + y \geq 2$
2. Fall a) $x < 2$ und $y \geq -1$, $g_c: \ -x - y \geq 0$
2. Fall b) $x < 2$ und $y < -1$, $g_d: \ -x + y \geq -2$

b) $s = 16 + 9 + 4 + 2 + 3 + 20 = 54$

Lösung 6 *evtl.??*

a) $x \neq 1$ und $x \neq 2$, also $3 \geq \frac{2 \cdot |x-1|}{x-2}$
1. Fall a) $x > 2$ und $x > 1$, $x \geq 4$
1. Fall b) $x > 2$ und $x < 1$, Wid,
2. Fall a) $x < 2$ und $x > 1$, $1 < x < 2$
2. Fall b) $x < 2$ und $x < 1$, $x < 1$
somit $x \in [4, \infty) \cup (1, 2) \cup (-\infty, 1)$

b)

$$s = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k k(k+1) x^{k-1}$$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x+2, & -2 \leq x < -1 \\ -x-2, & x < 2 \end{cases}$

Lösung 7 *evtl.??*

$$\sum_{j=k}^{20} x_k = 4 \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$