Klasse ST13a **MAE1 zweiter Test** 02. Dezember 2013

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 4x - 5}$$

Gibt es einen Unterschied, falls $x \to 1^+$

b) Gegeben sind $a_n = \frac{4n}{2n+1}$ $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$.

- Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ für $n \longrightarrow \infty$.
- Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl N so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N$.

Aufgabe 2

a) Von einer arithmetischen Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist bekannt:

$$a_4 + a_5 = 48 \qquad \text{und} \quad a_2 + a_6 = 42$$

Bestimmen Sie die Partialsumme s_n der ersten n Glieder der Folge $\{a_k\}$.

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{x^8 - x^4 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Steigung der Sekante im Intervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $x_0 > 0$. Vereinfachen Sie den entstehenden Ausdruck soweit als möglich.

Wohin strebt dieser Ausdruck, falls $\Delta x \longrightarrow 0$ geht?

b) Wie muss die $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x-14}{x-2} & x \neq 2 \\ c & x = 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist?

Aufgabe 4

Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + c$, wobei $c > 0$.

a) Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $y = f(x)$ durch den Nullpunkt, sowie ihre Berührungspunkte.

b) Wie weit sind die Berührungspunkte voneinander entfernt?

c) graphische Darstellung
Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Steigung der Sekante im Intervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $x_0 > 0$. Vereinfachen Sie den entstehenden Ausdruck soweit als möglich.

Wohin strebt dieser Ausdruck, falls $\Delta x \longrightarrow 0$ geht?

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 8}{x^2 + 3x}$$

alle Nullstellen, Pole, die Asymptote, sowie, falls vorhanden, die Symmetrien.

Graphische Darstellung der Kurve $y = f(x)$.

Geben Sie den Definitions-, sowie den Wertebereich von f an.

Aufgabe 6

Die Tangente an die Kurve $y = f(x) = 2 - x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ begrenzt zusammen mit der $x-$ und der $y-$ Achse ein Dreieck. Skizzieren Sie die gegebene Situation und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

MAE1 Lösungen zweiter Test 02.12.13

Lösung 1

a) Faktorisierung mit Hilfe des Hornerschemas:

$$\frac{x^2-2x+1}{x^3+4x-5} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x^2+x+5)} = \frac{x-1}{x^2+x+5}$$

also

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x^3+4x-5} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2+x+5} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x+5} = 0$$

es gibt keinen Unterschied, ob x von links oder rechts gegen 1 strebt

b)
- $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 2$
- $$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1} < 10^{-3} \quad \Longrightarrow n > 1000 - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow N = 999$$

Lösung 2

a) arithmetische Folge: $a_k = a_1 + (k-1)d,\ k \geq 1$

$$\left\{\begin{array}{lll} a_4 + a_5 & = & 2a_1 + 7d \quad = 48 \\ a_2 + a_6 & = & 2a_1 + 6d \quad = 42 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad d = 6,\ a_1 = 3$$

und damit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n-1} k = 3n + 6\frac{(n-1)n}{2} = 3n^2 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

b)

$$\frac{x^8 - x^4 + 2x + 1}{x^2 - 1} = x^6 + x^4 + \frac{2x+1}{x^2-1}$$

und

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad \Longrightarrow 2x + 1 = A(x-1) + B(x+1) \quad \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2}$$

Lösung 3

a)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x_0+\Delta)\cdot x_0} \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{1}{(x_0+\Delta)\cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

b)

$$x^2 + 5x - 14 = (x-2)\cdot(x+7) \quad \Longrightarrow c = 9$$

Lösung 4 *alt*

a) Faktorisierung von Zähler (Hornerschema) und Nenner: kürzen mit $(x-2)$ *vor* dem Grenzwert

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \Longrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$$

b) Vor dem Grenzwert mit n kürzen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 5$$

da $\frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.

Lösung 5 *alt*

a) schriftliche Division mit Rest liefert:

$$y = f(x) = x+6+\frac{25x-58}{x^2-6x+9}$$

also: die Asymptote $y = x+6$ beschreibt das Verfalten der Funktion für $x \longrightarrow \pm\infty$.

b) Faktorisierung des Nenners (Hornerschema): $x^3-x^2-x+1 = (x-1)^2\cdot(x+1)$.
Ansatz für die PBZ:

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcr} x^0: & -1 & = & -A & + & B & + & C \\ x^1: & 3 & = & & & B & - & 2C \\ x^2: & 2 & = & A & & & + & C \end{array}\right\}$$

Lösung mit dem Gauss–Algorithmus: $A = \frac{5}{2}$, $B = 2$ und $C = -\frac{1}{2}$

Lösung 6 *alt*

a) s ist eine geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = -\frac{1}{2}$, also

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^n)$$

und damit

$$s_{99} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^{99}) > s_{100} = \frac{2}{3}\cdot(1-q^{100})$$

da $q^{99} < 0$ und $q^{100} > 0$.

b) $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 78+3 = 81 = a_1\,\frac{1}{1-q}$, $a_1(1+q+q^2) = 78$, woraus $81(1-q^3) = 78$ folgt und somit $q^3 = \frac{1}{27}$, also $q = \frac{1}{3}$.
Da $a_1 = 81(1-q) = 54$, erhalten wir daraus $a_2 = a_1\cdot q = 18$ und $a_3 = a_2\cdot q = 6$