Klasse ST12a **MND1 Schlussprüfung** 24. Januar 2014

Name:

Hilfsmittel:	Formelsammlung, eigene Zusammenfassung, **ohne** elektronische Hilfsmittel.
Zeit:	120 Minuten.
Bewertung:	Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Sei $F(x) = 4 - \frac{1}{3} \cdot |x|$.

a) Wie muss das Intervall $[a, b] = [-1, \ldots]$ gewählt werden, damit alle Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

b) Graphische Darstellung von $x = F(x)$ auf dem in a) gewählten Intervall.

c) Bestimmen Sie den Fixpunkt s. Wie schnell konvergiert diese Iteration?

d) Ist eine Bisektion für dieses Beispiel schneller? (*mit* Begründung)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion

$$y_1(t) = e^{-2t} \cdot \cos(\omega t) \qquad \omega > 0 \tag{1}$$

a) Ergänzen Sie (1) so, dass Sie eine Fundamentalbasis der Lösungen einer homogenen Differentialgleichung $2-$ ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten. Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung?

b)
- Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad y(0) = \alpha \qquad y'(0) = \beta \tag{2}$$

- Wie müssen die Anfangsbedingungen α und β gewählt werden, damit die Lösung von (2) für $x \geq 0$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 3

Gegeben ist

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Die Nullstelle von f soll mit der Iteration

$$x = \underbrace{x + k \cdot f(x)}_{=:F(x)} \qquad k \in \mathbb{R} \text{ ist ein Parameter} \tag{3}$$

bestimmt werden.

- Was muss über k verlangt werden, damit die Fixpunktiteration (3) konvergiert?
- Gibt es Werte für k, sodass (3) quadratisch konvergiert?

Bitte wenden

Aufgabe 4

a) Bis zum wievielten *Trapezwert* T_k muss bei *fortgesetzter Halbierung* mindestens gerechnet werden, um ein Resultat zu erhalten, das vom exakten Wert

$$I = \int_1^2 x^3 \, dx$$

um weniger als 10^{-4} abweicht? (mit einer Abschätzung für den Fehler nach oben).

Wieviele Funktionsauswertungen sind dazu nötig?

b) Wie oft müssen Sie beschleunigen, um den exakten Wert von I zu erhalten?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|} \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(3) = 1$.
Tipp: (4) ist separierbar und $|y| = y$ für $y \geq 0$.

b) Welche der (scheinbar) beiden möglichen Werte für $c \in \mathbb{R}$ in a) ist der richtige? (*mit* Begündung)

c) Für welches x_0 gilt für die Lösung aus a) $y(x_0) = 0$?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = g(x) \qquad \text{AB: } \begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq x < \pi \\ 1 & , \ \pi \leq x \end{cases} \tag{5}$$

Gesucht ist die stetig differenzierbare Lösung $y(x)$ von (5).

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$.

b) Was muss für $x = \pi$ verlangt werden, damit die Lösung $y(x)$ für $x \geq 0$ stetig differenzierbar ist?

c) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ für $x \geq \pi$.

ST12a MND1 Lösungen Schlussprüfung 24.01.14

Lösung 1

a) z.B. $[-1, b] = [-1, 5]$, allgemein $b > 4$

b) Graphik

c) $s = 3$ mit dem Konvergenzquotienten $q = \frac{1}{3}$

d) die Fixpunktiteration ist schneller als die Bisektion, da $q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Lösung 2

a)
$$y_2(t) = e^{-2t} \cdot \sin(\omega t)$$

d.h. $\lambda_{1.2} = -2 \pm j \cdot \omega$.

Damit erhalten wir: $p_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 4\lambda + (4 + \omega^2) \stackrel{!}{=} 0$, (Satz von Vieta)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + (4 + \omega^2)y = 0 \qquad y = y(t)$$

b)
- $$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -3$$

  mit der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

  AB:
  $$\left\{ \begin{array}{rclr} y(0) & = & \alpha = & c_1 + c_2 \\ y'(0) & = & \beta = & c_1 - 3c_2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow c_2 = \frac{(\alpha - \beta)}{4} \quad c_1 = \frac{(3\alpha + \beta)}{4}$$

  also
  $$y(x) = \frac{(3\alpha + \beta)}{4} \cdot e^x + \frac{(\alpha - \beta)}{4} \cdot e^{-3x} \qquad x \geq 0$$

- $$c_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\alpha + \beta = 0 \qquad \beta = -3\alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = -\frac{\beta}{3}$$

  also
  $$y(x) = \alpha e^{-3x} \qquad \text{oder} \quad y(x) = -\frac{\beta}{3} \cdot e^{-3x} \qquad x \geq 0$$

Lösung 3

a) $x_1 = 1$, d.h. $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$, nur eine reelle Nullstelle.

b) $s = 1$ ist der einzige Fixpunkt der Iteration.
$F'(x) = 1 + k \cdot (3x^2 - 2x + 1)$ und $F''(x) = k \cdot (6x - 2)$
Konvergenz, falls $|F'(s)| = |1 + 2k| < 1$, also

- $1 + 2k \geq 0$: $-\frac{1}{2} \leq k < 0$.
  Für $k = -\frac{1}{2}$ ist $F'(s) = 0$ und $F''(s) = 4k \neq 0$, somit ist die Iteration sogar quadratisch konvergent!

- $1+2k<0$: $-1<k<-\frac{1}{2}$

Lösung 4

exakter Wert des Integrals:

$$I = \int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{15}{4}$$

a) für den Trapezwert $T(h)$ gilt:

$$|I-T(h)| < \frac{b-a}{12}h^2 \cdot M_2 \leq 10^{-4} \qquad M_2 = \max_{1\leq x\leq 2} |f''(x)| = 12 \qquad \Longrightarrow h = \frac{1}{n} \leq 10^{-2}$$

und damit $100 \leq n = 2^k$, wobei $k =$Anzahl Halbierungen, d.h. es sind 7 Halbierungen nötig.

Anzahl Funktionsauswertungen bis und mit T_k: 2^k+1, hier $k=7$, also $128+1=129$

b) einmal, denn $S_1 = \frac{4T_1-T_0}{3}$ = erster Simpsonwert. Die Methode von Simpson ist exakt für alle Polynome vom Grad ≤ 3.

$$T_0 = \frac{9}{2} \qquad T_1 = \frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}M_0 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{27}{8} = \frac{63}{16} \qquad S_1 = \frac{1}{3}\left(4\cdot\frac{63}{16} - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{45}{4} = \frac{15}{4}$$

Lösung 5

a)

$$y' = \sqrt{y} \quad \Longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad \Longrightarrow 2\sqrt{y} = x + c \quad \Longrightarrow y_h(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \ c \in \mathbb{R}.$$

$$y(3) = 1 \quad \Longrightarrow \left(\frac{3+c}{2}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow c^2 + 6c + 5 = 0 \quad \Longrightarrow c_1 = -1\,, \ c_2 = -5$$

b) Verifikation (zur Bestimmung von y wurde quadriert!):

- für $c=-1$ ist $y(3)=1$ und
$$y'(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)\Big|_{x=3} = 1 > 0$$
- für $c=-5$ ist $y(3)=1$ und
$$y'(x) = \left(\frac{x-5}{2}\right)\Big|_{x=3} = -1 < 0$$
dieser Wert für c kommt nicht in Frage,

also ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \qquad x_0 \leq x$$

c)

$$y(x_0) = 0: \qquad \left(\frac{x_0-1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow x_0 = 1$$

Lösung 6

a) homogene Dgl: $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1.2} = -1 \pm j \cdot 2$, also

$$y_h(x) = e^{-x} \cdot (a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)) \qquad 0 \le x \le \pi$$

mit

$$y_h'(x) = -e^{-x} \cdot (a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)) + e^{-x} \cdot ((-2)a_1 \sin(2x) + 2b_1 \cos(2x))$$

AB:

$$\begin{array}{rll} y(0) & = 1 & = a_1 \\ y'(0) & = 1 & = -a_1 + 2b_1 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = b_1 = 1$$

schliesslich:

$$y(x) = e^{-x} \cdot (\cos(2x) + \sin(2x)) \qquad 0 \le x \le \pi$$

mit

$$y'(x) = -e^{-x} \cdot (\cos(2x) + \sin(2x)) + e^{-x} \cdot (-2\sin(2x) + 2\cos(2x))$$

b) $\cos(2\pi) = 1$ und $\sin(2\pi) = 0$:

$$y(\pi) = e^{-\pi} \qquad y'(\pi) = e^{-\pi}$$

c) inhomogene Dgl: $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei $y_h(x)$ aus a) und $y_p(x) = k$, Tabelle Papula, z.B. Also

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x} \cdot (a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)) + \frac{1}{5} \qquad \pi \le x$$

mit

$$y_a'(x) = -e^{-x} \cdot (a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)) + e^{-x} \cdot ((-2)a_1 \sin(2x) + 2b_1 \cos(2x))$$

AB:

$$\begin{array}{rll} y(\pi) & = e^{-\pi} & = e^{-\pi} a_1 + \frac{1}{5} \\ y'(\pi) & = e^{-\pi} & = -e^{-\pi} a_1 + e^{-\pi} 2b_1 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 1 - \frac{e^{\pi}}{5}, \; b_1 = \frac{1 + a_1}{2} = 1 - \frac{e^{\pi}}{10}$$

schliesslich

$$y(x) = e^{-\pi} \cdot \left(\left(1 - \frac{e^{\pi}}{5}\right) \cdot \cos(2x) + \left(1 - \frac{e^{\pi}}{10}\right) \cdot \sin(2x) \right) + \frac{1}{5} \qquad \pi \le x$$